

摘要

为提高螺旋桨分析的精确性和简便性, 本文对用于螺旋桨水动力性能及流场分析的面元-涡粒子耦合算法进行了研究, 主要成果和创新点如下:

(1) 在面元法中, 分别建立了快速压力库塔条件实现算法和自适应可变速度光滑参数模型, 提高了面元法程序的计算速度以及尾涡面位置的预测精度。首先, 提出了求解压力库塔条件中雅可比矩阵的解析方法, 使得雅可比矩阵的计算时间较传统算法降低了5个量级; 基于此建立了快速压力库塔条件实现算法, 大幅缩短了压力库塔条件的计算时间, 并增强了压力库塔条件的收敛能力。此外, 提出了与尾涡面元年龄相关联的可变速度光滑参数模型, 且建立了模型参数与螺旋桨负载之间的关系, 解决了传统常值速度光滑参数模型的局部取值不合适且取值无依据的问题。最后, 通过对多个螺旋桨水动力性能的计算及与实验数据的对比, 分析了所得面元法的有效性和适用性。

(2) 研究了涡粒子法中现有的两种亚格子耗散模型, 为两者之间的选择提供了依据。使用两种亚格子耗散模型, 即 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型和 Cottet 人工粘性模型, 对双涡环的碰撞与再连接过程进行了涡粒子法数值模拟; 通过对模拟过程中计算时间、涡结构以及流场总涡量、冲量、角冲量三个守恒量的变化的分析, 得出结论: Cottet 人工粘性模型计算时间较长, 但在计算精度和稳定性方面表现更好。

(3) 提出一对多的低阶面元-涡粒子转化算法, 结合面元法和涡粒子法的研究成果, 建立了面元-涡粒子耦合算法, 并分析了耦合算法中的参数影响。首先, 使用二维插值方法在低阶面元上构建了偶极子强度的连续分布, 在此基础上建立了一对多的低阶面元-涡粒子转化算法, 使得涡粒子的密度摆脱了面元密度的约束。然后, 给出了面元-涡粒子耦合算法的算法流程, 并改进了涡粒子重分布过程。最后, 通过数值模拟实例, 验证了所得面元-涡粒子耦合算法的有效性, 并分析了耦合算法中相关参数对计算结果的影响, 得出结论: 各种参数对水动力性能的影响都较小, 不同设置所引起的差异在1%以内; 涡粒子核半径尺寸对尾流涡强分布的影响明显, 较小的涡粒子核半径会产生较大的涡强。通过分析, 给出了使用随边处边界层厚度来确定涡粒子核半径的建议。

(4) 在已得到的面元-涡粒子耦合算法的基础上, 加入旋转周期性边界条件, 提升了其分析螺旋桨流场的计算效率以及对高涡粒子密度的模拟能力。针对螺旋桨流场的旋转周期性, 建立了旋转周期性边界条件, 并对涡粒子运动方式、快速多极子算法以及涡粒子重分布过程进行了相应的改进。通过对多个螺旋桨的流场和水动力性能的分析, 验证了所得算法的精确性和有效性, 并得出结论: 面元-涡粒子耦合算法所得的水动力性能比面元法更加精确, 在重载和大侧斜情况下差异尤为明显; 耦合算法所得的流场速度分布比面元法更加接近实验测试结果; 耦合算法所得的水动力性能和流场细

节都与实验数据具有很好的一致性。

关键字：螺旋桨，面元法，涡粒子法，耦合，涡量场

Abstract

To improve the accuracy and simplicity of marine propeller analysis, a boundary element-vortex particle couple method for the analysis of marine propeller's performance and surrounding flow field is developed. The main conclusions and innovations are as follows:

(1) For BEM (Boundary Element Method), a fast realization method for the pressure Kutta condition and a wake alignment method with adaptive variable velocity smoothing parameter are developed. Firstly, an analytical method to evaluate the Jacobian matrix for the pressure Kutta condition is built, which costs only around $1e-5$ the time of the conventional method. Based on the analytical Jacobian matrix evaluation method, the fast realization method for the pressure Kutta condition is developed, and has not only reduced the computational time of BEM obviously, but also improved the convergence ability of the pressure Kutta condition. Besides, a model in which the velocity smoothing parameter is variable and correlated to the wake panel's age is developed to predict the wake surface's position more accurate. A formula to determine the range of the velocity smoothing parameter according to the propeller's attached circulation is also formulated. Finally, by comparing the open-water performances predicted by obtained BEM code with experimental data, the obtained BEM code is verified.

(2) The two SGS (sub-grid scale) diffusion models in VPM (Vortex Particle Method) are studied, which provides a reference for the choice between them. The two models, i.e. Smagorinsky-Lilly SGS model and Cottet artificial vorticity model, are used in the VPM simulation of different vortex ring reconnection procedures. The variation of the vortex structure, maximum particle strength and three conserved quantities (the vorticity, impulse and angular impulse) during the simulations are analyzed. The results indicate that the Cottet artificial vorticity model costs more computational time, however performs better in the aspect of accuracy and stability.

(3) A method to convert one low-order dipole boundary element into multi vortex particles is developed, and with the results obtained above for BEM and VPM, the boundary element-vortex particle couple method is built. Firstly, the 2D interpolation method is used to obtain continuous dipole distribution on the panels. With the continuous dipole distribution, the method to convert one boundary element to multi vortex particles is built, which makes the particle density free from the boundary element's size. Then, the coupling algorithm is described in detail, and the vortex particle redistribution procedure is modified for the couple method. Finally, with numerical simulations, the couple method is verified and the parameter sensibilities are analyzed. The conclusions state: all parameters have little influence on the ob-

tained hydrodynamic performances (the differences are within 1%); The particle core size has an obvious influence on the vorticity strength, and a smaller core size leads to a larger vorticity strength. With analyses, it is advised the core size should be determined by the boundary layer thickness near the trailing edge.

(4) The rotational periodic boundaries are utilized in the boundary element-vortex particle couple method for the computation of marine propeller's hydrodynamic performances and flow field, so that the computational efficiency is enhanced. To consider periodic boundary conditions, the way of vortex particles movement, FMM (Fast Multipole Method) and vortex particle redistribution procedure are modified and improved. Numerical simulations of different marine propellers are carried out and the results indicate: The obtained open-water performances and flow field details are all more accurate than the results obtained with BEM, and they correlate also very well with experimental results.

Keywords : Marine propeller, Boundary Element Method, Vortex Particle Method, Vorticity field

目 录	
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 国内外研究现状	2
1.2.1 螺旋桨水动力性能及流场分析方法的研究现状	2
1.2.2 面元法的研究现状	5
1.2.3 涡粒子法的研究现状	7
1.2.4 面元-涡粒子耦合算法的研究现状	14
1.3 问题的提出	16
1.4 主要研究内容与安排	17
1.5 本章小结	19
第 2 章 基于压力库塔条件和可变速度光滑参数模型的面元法研究	20
2.1 面元法基础理论	20
2.2 快速压力库塔条件实现算法	25
2.2.1 压力库塔条件的迭代实现方法	25
2.2.2 压力库塔条件中雅可比矩阵的解析求解方法	26
2.2.3 更新桨叶表面偶极子强度的偶极子增量法	28
2.2.4 实例分析	29
2.3 自适应可变速度光滑参数模型	39
2.3.1 可变速度光滑参数模型	41
2.3.2 可变速度光滑参数的自适应计算	42
2.3.3 实例分析	43
2.4 计算实例	44
2.4.1 网格无关性研究	44
2.4.2 PPTC 螺旋桨计算实例	46
2.4.3 P4119 螺旋桨计算实例	47
2.4.4 P4384 螺旋桨计算实例	49
2.5 本章小结	49
第 3 章 基于不同亚格子耗散模型的涡粒子法研究	50
3.1 涡粒子法基础理论	50
3.2 涡粒子法中的亚格子耗散模型	53
3.2.1 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型	54
3.2.2 Cottet 人工粘性模型	54

3.3 不同模型对倾斜双涡环碰撞问题的数值模拟	55
3.4 不同模型对平行偏置双涡环碰撞问题的数值模拟	64
3.5 本章小结	69
第 4 章 基于一对多面元-涡粒子转化的面元-涡粒子耦合算法研究	70
4.1 一对多面元-涡粒子转化算法	70
4.1.1 基于二维插值的偶极子连续分布重构算法	71
4.1.2 面元上任意四边形区域到涡粒子的转化	73
4.1.3 单个面元对应的涡粒子数量的自适应确定	74
4.2 基于一对多面元-涡粒子转化的面元-涡粒子耦合算法	75
4.2.1 耦合算法流程	75
4.2.2 耦合算法中的涡粒子重分布过程	77
4.3 计算实例及参数影响分析	78
4.3.1 对水动力性能的影响分析	80
4.3.2 对流场涡量分布的影响分析	82
4.4 本章小结	87
第 5 章 考虑旋转周期性边界的螺旋桨面元-涡粒子耦合算法研究	88
5.1 耦合算法中的旋转周期性边界条件	88
5.2 涡粒子重分布过程的改进	89
5.2.1 扇形计算域中涡粒子的均匀分布	89
5.2.2 涡粒子强度的多方向分步插值	90
5.2.3 计算域边界处的涡粒子强度插值	91
5.2.4 涡粒子重分布流程总结	91
5.3 快速多极子算法改进	92
5.3.1 快速多极子算法改进	93
5.3.2 效果分析	94
5.4 计算实例	95
5.4.1 PPTC 螺旋桨计算实例	95
5.4.2 P4119 螺旋桨计算实例	101
5.4.3 P4384 螺旋桨计算实例	104
5.5 本章小结	105
第 6 章 全文总结和展望	106
6.1 全文总结	106
6.2 工作展望	107

参考文献	109
附 录	119
附录A 快速多极子算法及其在涡粒子法中的应用	119
附录A.1 快速多极子算法概述	119
附录A.2 快速多极子算法细节	119
附录A.3 基于快速多极子算法的涡粒子速度与速度梯度计算	123
致 谢	125
攻读博士学位期间发表的学术论文和参加科研情况	127

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

近年来, 随着我国不断提高对海洋资源探索和开发的重视, 军用和民用方面的海洋科技都得到了显著的发展。螺旋桨作为海洋航行器的主要动力推进单元, 广泛地应用于各类船舶、海上平台以及水下无人航行器上, 是对海洋进行探索、认识和开发过程中不可或缺的部分, 也是影响我国海洋科技综合发展水平的关键部分。现代螺旋桨已有两百多年的发展, 其主要研究内容一直以来集中在推力和效率等性能方面, 追求在保证所需推力的前提下, 尽量提高螺旋桨的推进效率。而最近, 随着对相关海洋航行器隐秘性等方面的要求不断提高, 螺旋桨的噪声、振动特性得到越来越多的关注。同时螺旋桨梢涡中心低压区域产生的梢涡空化, 航行器进行全速倒车时螺旋桨的动态载荷以及周围流场的细节, 复合材料螺旋桨工作时由脱落涡诱导产生的动态响应等都是当前各国学者关心的课题。这些问题的解决都需要对螺旋桨周围流场的细节有充分的了解, 而影响螺旋桨流场的最主要因素是其工作时产生的各种涡。流场中的涡分布决定了流场中速度和压力的分布, 不只对螺旋桨性能有着直接影响, 对其噪声特性、桨叶实时载荷分布以及尾流场中其他机构表面的压力分布都有着关键性的影响。对螺旋桨周围涡流的深入了解, 无论是对提高现有螺旋桨的各方面性能还是对研发新概念的螺旋桨, 都具有重要意义。螺旋桨流场研究方法主要有两种, 即实验测试方法与数值模拟方法。实验测试方法所得结果更加精确, 但一般较为昂贵, 且研究周期长。而数值模拟方法具有研究周期短、经济投入少的特点, 且通过后处理, 可以更方便的获得流场细节, 实现对流场现象的内在机理的研究。

当前螺旋桨流场分析的数值模拟方法主要有面元法和雷诺平均纳维-斯托克斯方程 (RANS, Reynold Averaged Navier-Stokes equations) 方法, 面元法具有前期准备工作少, 计算速度快的特点, 但是由于其考虑的是无粘不可压理想流体, 不能较好的分析尾流涡场。RANS方法具有计算代价低, 又能较好的对流场中的粘性进行模拟的特点, 被广泛地使用在螺旋桨的性能分析中。然而 RANS 方法在模拟涡场时, 由于数值耗散的问题, 导致涡耗散过快, 不能精确模拟流场中的涡, 进而影响到了对流场细节的捕捉。针对此问题, 多位学者使用大涡模拟 (LES, Large Eddy Simulation) 或者分离涡模拟 (DES, Detached Eddy Simulation) 方法[1, 2, 3]对螺旋桨的流场进行了分析, 得到了更加精确的结果, 但一般此类方法对计算网格的要求较高, 且计算时间较长。针对以上问题, 本文将无网格的涡粒子法应用到螺旋桨的尾流分析中。涡粒子法是一种以涡量为核心, 专门针对涡量进行模拟计算的无网格方法, 已经在涡环碰撞[4, 5]、风场中风力发电机流场间的相互影响[6, 7, 8, 9]、直升机螺旋桨产生的梢涡对机身压力分布的影

响[10]等方面得到了应用。涡粒子法不但规避了由于网格离散引起的数值耗散问题，时间步长也不受库朗（CFL, Courant–Friedrichs–Lewy）条件影响，在进行非稳态计算时，可以设定更大的时间步长，进而减少模拟时间。然而当前的涡粒子法对于固体边界条件的处理方法均较为复杂，且难以应用到诸如螺旋桨的复杂几何外形上。

本文通过将面元法和涡粒子法进行耦合，将涡粒子法应用于敞水条件下单桨的尾流场和梢涡分析中，使得水动力性能的计算以及尾流中涡的分析更加准确，对今后船舶螺旋桨的流场分析、精细设计与校验提供了新的研究手段。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 螺旋桨水动力性能及流场分析方法的研究现状

船舶螺旋桨的水动力性能及流场分析方法主要包括势流计算方法和粘流计算方法，本节将分别描述他们的发展与研究现状。

(1) 势流计算方法

势流理论中将所分析流场看作无旋流场，忽略流体的粘性对流场进行求解，物体表面的粘性剪切应力通过经验公式或求解边界层方程进行计算。对螺旋桨进行分析的势流方法主要包括升力线法、涡格法（或升力面法）和面元法。

升力线法中用一条线来表示螺旋桨的桨叶，在该线上施加环量分布来表示桨叶径向载荷分布，这条线即称为升力线。升力线上的涡量（环量）称为附着涡。用从升力线上泄出的等距螺旋线表示桨叶泄出涡量，如图1-1所示，根据涡旋不生不灭定理，某点处泄出涡的环量应等于该点处附着涡的导数。文献[12, 13]中给出了半无穷长等距螺旋线的诱导速度的求解方法，若已知升力线上环量分布，便可求得升力线上的速度。依据库塔-茹科夫斯基定理，由速度和环量可得升力线各处受力，进而求得螺旋桨的性能。根据升力线上环量分布表示方法的不同，升力线方法可分为解析式升力线方法[12]和数值离散式升力线方法[14]。离散式升力线方法对桨叶环量的表示更加灵活，可以更方便地表示不同形式的螺旋桨，被应用于开源升力线软件 OpenProp 中[15, 11, 16]。升力线

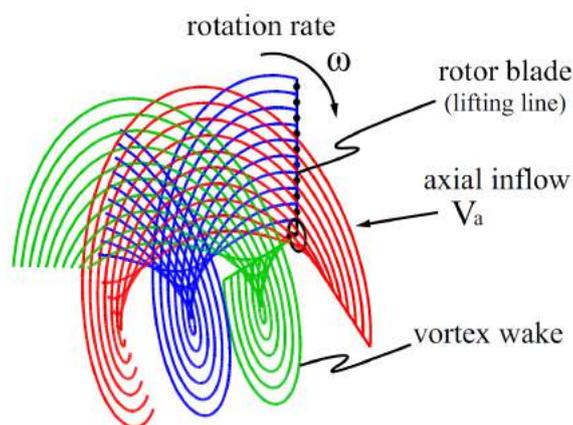


图 1-1 升力线方法中的桨叶和尾涡描述（摘自[11]）

方法需要提前知道螺旋桨桨叶上的环量分布，且一般不考虑泄出涡的变形，求解精度不高，所以现在很少用来分析螺旋桨的性能和流场，而是用在螺旋桨的初始设计中。

涡格法在螺旋桨分析中也常称为升力面法，其使用无厚度的二维涡格来表示螺旋桨桨叶，并在随边节点处泄出涡线[17, 18, 19]，如图1-2所示。其泄出涡系分为过渡区和远场区，在过渡区内根据实验所得的经验公式[20]考虑涡系的半径收缩，在远场区内只考虑等距螺旋线表示的梢涡和毂涡，如图1-3所示。涡格上的环量通过无穿透边界条件求得，泄出涡线上的环量与桨叶涡格环量的关系同样根据涡旋不生不灭定理确定。文献[21]中通过在涡格所表示的螺旋桨中心面上布置源汇强度，使得涡格法可以考虑桨叶的厚度分布。其算法分两步进行，首先使用传统涡格法对无厚度的螺旋桨进行分析，根据叶片表面法向速度为零的条件求解源汇强度，并对流场进行修正。使用所得算法，文献[21]中使用涡格法得到了可以与面元法相比拟的结果。然而涡格法无法考虑导边吸力，计算螺旋桨的扭矩时存在不可避免的误差。

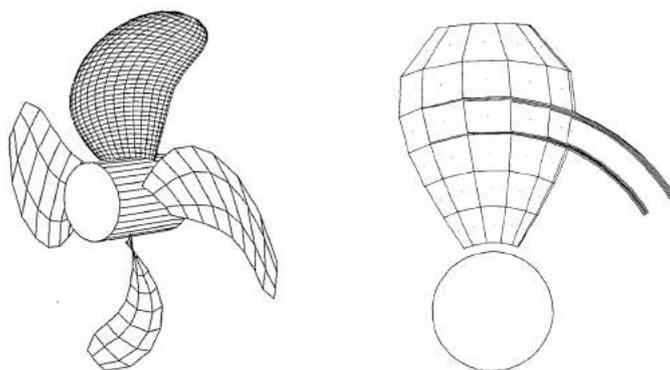


图 1-2 涡格法中桨叶表面的离散涡格和泄出涡示意（摘自[19]）

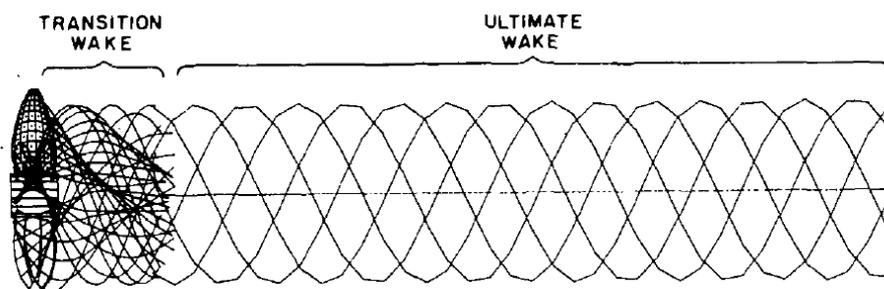


图 1-3 涡格法中的泄出涡系统（摘自[19]）

面元法直接将物体表面离散成小面（称为面元），泄出尾涡用尾涡面表示，并使用面元对其离散，如图1-4所示。面元法中，通过在每个面元上布置源汇或偶极子等奇点对流场进行建模，根据物体表面的无穿透边界条件，建立有关奇点强度的线性方程组并求得各面元上的奇点强度，进而得到整个流场的速度、压力等细节以及螺旋桨的水动力性能。面元法是当前势流方法中计算精度最高的方法，与粘流方法相比，具有计算速度快、前处理简单的特点，被广泛的应用于设计阶段的螺旋桨水动力性能分析[22, 23, 24, 25]。

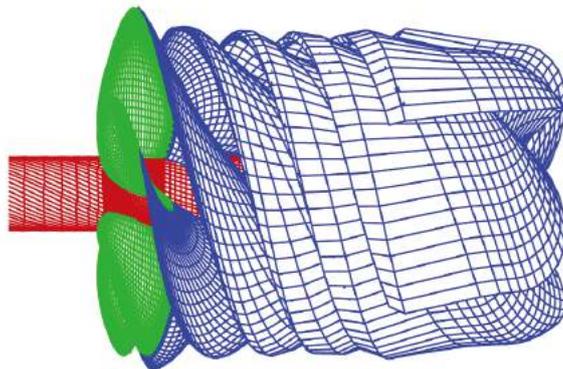


图 1-4 面元法中物体表面和尾涡面的离散（摘自[26]）

(2) 粘流计算方法

随着计算机硬件的发展，粘流计算方法在螺旋桨性能和流场分析中的应用越来越普遍。其可以得到比势流方法更接近实际的流场细节，可以更精确的模拟螺旋桨桨叶表面产生的壁面涡以及尾流中的泄出涡和梢涡结构，在研究新型螺旋桨、分析螺旋桨尾流涡结构、计算船-桨-舵相互影响以及复杂工况下的流场特性和螺旋桨载荷分布等方面都发挥了重要的作用。

文献[27, 28]中使用商用 RANSE 求解器 CFX 对泵喷推进器的定常水动力性能进行了计算。文献[29]使用 RANSE 求解器对模型桨和实桨两种尺寸的导管螺旋桨进行了精确计算，研究了导管桨的尺寸效应。文献[30]使用 CFX 计算叶梢负载（Contracted & Loading Tip, CLT）螺旋桨的敞水性能，得到了和实验吻合的结果，并借助计算结果研究了叶梢负载螺旋桨的尺度效应。文献[31]使用 CFX 计算对比了有轮毂式和无轮毂式环驱推进器（Rim-Driven Thruster, RDT）的流场特性和敞水性能，发现无轮毂式环驱推进器的推力和效率都比有轮毂式的大一些，并借助所得的流场细节，对其原因进行了分析。文献[32]采用重叠网格算法对船后桨舵相互干扰进行了分析，避免了动网格的使用。文献[33]对船后工作的螺旋桨进行分析时，同样采用了重叠网格技术来考虑螺旋桨的旋转运动，计算所得的螺旋桨尾流涡结构与实验测量结果取得了定性的吻合。

文献[1]中分别使用 RANSE 和 DES（分离涡模拟）方法对螺旋桨后方两个直径内的尾涡结构进行了数值模拟，并发现 RANSE 方法虽然可以很好的预测螺旋桨推力、扭矩等整体性能，但由于其过度耗散的特性，不能完全捕捉到流场中的涡结构。相比之下，DES 方法在固体边界附近使用 RANSE 方法来模拟边界层，而在其他流域使用 LES 方法对涡结构进行模拟，使用有限加密的计算网格得到了满意的结果，重现了在实验中[34]观测到的梢涡配对、失稳以及流场动能由叶片谐振频率到桨轴谐振频率的转化等现象，如图1-5所示。文献[2]中使用 LES 技术对倒车情况下的螺旋桨周围流场进行了非定常分析，成功的捕捉了螺旋桨倒转形成的涡环结构，所得的推力系数、扭矩系数的时均值和标准差以及几个截面处的时均轴向速度分布都与实验测量值吻合的很好。

除上述方法外，还有一种将粘流求解器和势流方法结合的螺旋桨流场分析方法[35,

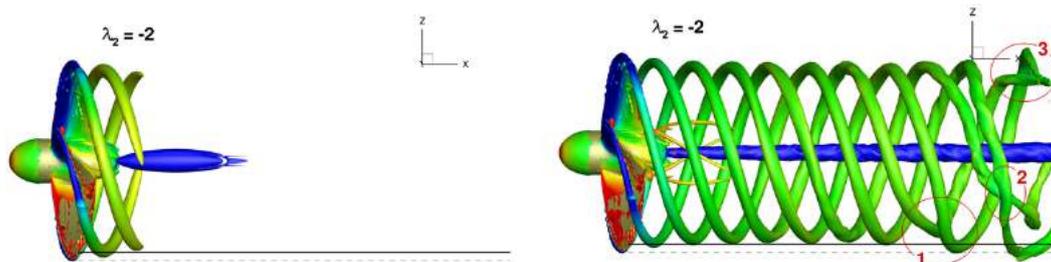


图 1-5 RANSE 和 DES 计算所得的尾流涡结构对比（摘自[1]）

36, 37]。其使用粘流方法对整个流场域进行建模与求解，在螺旋桨处并不放置螺旋桨，而是使用普通的网格单元。使用势流方法（如面元法）对螺旋桨进行分析，将所得的桨叶载荷以体积力的方式，根据位置对应关系，加到粘流求解器中对应的网格单元上。势流方法中的进流速度取粘流求解器中螺旋桨盘面前方的流场速度。这种耦合算法可以用较少的计算量考虑螺旋桨对整个流场产生的影响。

粘流计算方法适应性好，借助 LES 或者 DES 技术可以较好的捕捉螺旋桨流场中的涡结构，然而粘流计算方法普遍需要划分高质量流体计算域网格，即需要经验又耗费时间，且时间步长受 CFL 数限制，意味着加密网格的非定常计算需要更长的计算时间；此外，迎风格式等稳定数值算法中具有先天的数值耗散特性，易导致涡结构细节的丢失。

1.2.2 面元法的研究现状

面元法被应用到螺旋桨的流场分析中开始于上世纪80年代[38, 39]，同一时期[40, 41]也将面元法应用于各种螺旋桨的稳态和非稳态的计算中，为面元法的完善做出了贡献。根据面元上奇点分布的阶次，面元法可分为高阶面元法（面元上奇点为线性分布或更高阶次）和低阶面元法（面元上奇点为零阶分布）。几何离散相同的情况下，高阶面元的求解精度更高，但有关奇点强度的封闭方程组难以直接建立；低阶面元法的方程组建立过程简单直观，易于求解，且可通过布置更多的面元来提高计算精度。螺旋桨分析中的面元法多为低阶面元法。根据建立线性方程组时具体使用的边界条件，面元法可分为基于速度（边界条件为物体表面法向速度为0，亦称为纽曼边界条件）和基于速度势（边界条件为物体表面内部总速度势或扰动速度势为0，亦称为狄利克雷边界条件）的面元法。一般认为[39]，基于速度势的面元法计算量小，且计算精度较高。

近年来，有关面元法的研究主要集中于面元法的工程应用和功能拓展。中船重工702研究所的学者使用面元法对对转螺旋桨的水动力性能进行了预报[22, 23]，其文中通过将前后桨之间诱导速度的周向平均值作为伴流的一部分，来考虑前后螺旋桨相互之间的干扰，得到了和实验测试数据较为接近的结果。文献[24]使用面元法计算了导管螺旋桨的性能，观察到尾涡的精确计算对于性能的预测至关重要，并提出了导管边界层对尾涡面形状影响的计算模型。文献[42]使用面元法对船后工作的实桨进行了外

形优化设计，得益于面元法计算的高效性，文中使用遗传算法进行优化，并得到了最优的螺旋桨外形。文献[43]基于面元法对导边泄出涡进行了模拟，提高了非设计点处扭矩的预测精度。文献[44]基于面元法对螺旋桨和舵之间的非定常交互影响进行了模拟。在其工作中，螺旋桨的尾涡面使得舵周围的流场产生了变化，同时舵也使得螺旋桨的尾涡面形状和位置发生了改变，桨和舵的相互影响通过面元法中的尾涡面直接得到。文献[25]使用升力面模拟转子，用面元法模拟定子，对具有后置定子的旋转机械系统中转子和定子间的相互干涉进行了模拟，并计算了所产生的空化范围和空泡形状。文献[45]基于面元法对工作于倾斜来流中的螺旋桨的性能和空化情况进行了分析，得到了与实验测试以及粘流计算结果相吻合的结果。

面元法中，使用库塔条件来建立物体表面的奇点强度与尾涡面上奇点强度之间的关系，根据所形成的方程组可分为线性库塔条件和非线性库塔条件，也经常分别被称为 Morino 库塔条件和压力库塔条件（非线性库塔条件中要求随边处压力面和吸力面的压差为零）。压力库塔条件所得结果更接近物理实际，因此被很多学者采用[46, 47, 48, 49]，然而其实施过程也更加复杂。实施压力库塔条件时，一般将尾涡面元上的未知偶极子强度作为自变量，将随边处压差看作由其决定的非线性函数，并使用牛顿迭代算法求解所得的非线性多维函数求根问题。由于随边处压差和尾涡面元的偶极子强度关系复杂，牛顿迭代算法中的雅可比矩阵一直以来都使用差商来近似，计算过程中涉及到多次的奇点强度方程组的求解，计算量很大。文献[39, 50]提出在压力库塔条件中使用修正的牛顿迭代算法，即每个时间步中，只计算一次雅可比矩阵，在后面的牛顿迭代步中使用第一步所得雅可比矩阵来近似当前步的雅可比矩阵。该方法使得压力库塔条件的计算量落在可接受的范围内，但影响了牛顿迭代的收敛速度，甚至导致在某些重载工况下原本可收敛的迭代过程变得不收敛。此外，一次的基于差商近似的雅可比矩阵计算的计算量仍较大，导致面元法的使用者必须在计算精度和计算速度之间进行抉择。所以，研究一种快速的雅可比矩阵计算方法对于提高面元法分析的精度和效率都具有十分重要的意义。

在面元法中，尾涡面元位置决定了流场描述的精确性，对螺旋桨水动力性能的准确计算也具有重要的影响。在前期的面元法中[50, 40, 41]，同升力面相似，尾涡面的形状和位置由实验所得的经验公式进行预定义。上世纪90年代中期，文献[51]基于高阶面元法，根据流场中的速度对尾涡面形状和位置进行迭代求解，使得尾涡面与流场速度方向相切（从而不会受到库塔-茹科夫斯基力）。对于低阶面元法，文献[52]中基于[53]中提出的涡团法，引入了速度光滑模型（去奇异模型），用具有非零涡核半径的非奇异涡管近似低阶偶极子面元等价得到的奇异涡线，将涡线上的环量按一定规律（由采用的涡核模型决定）分布于涡核半径决定的区域内，从而达到对速度计算的去奇异化；然后根据所得流场速度对尾涡面形状和位置进行迭代求解，同样得到了稳定的与流场相切的尾涡面。之后，这种求解尾涡面形状和位置的过程被称为尾涡对齐算法

(wake alignment), 尾涡对齐使得面元法可以更精确的模拟螺旋桨的尾流, 进而可以更好的预测螺旋桨的性能。然而, 低阶面元法中速度光滑模型中的涡核半径 (亦称为速度光滑参数) 一直以来都依据经验确定, 过大的速度光滑参数会使得流场细节丢失过多, 尾涡面变形过小; 过小的速度光滑参数又不能起到应有的作用, 影响计算的稳定性与收敛速度。且不同算例和工况中, 所需的速度光滑参数一般是不同的。此外, 我们还观察到, 在流场的不同位置 (或尾涡发展的不同阶段), 所需的最佳速度光滑参数也是不同的, 至今一直被采用的常值光滑参数模型, 会产生在上游区域过大而在下游区域过小的问题。所以, 研究一种可变速度光滑参数模型和确定最佳速度光滑参数取值的自适应算法, 对提高低阶面元法的尾涡面位置模拟精度具有重要意义。

1.2.3 涡粒子法的研究现状

涡粒子法 (Vortex Particle Method, VPM) 是一种无网格的涡方法, 其使用离散拉格朗日粒子对涡量输运方程进行数值求解[54, 55, 56, 57]。每个粒子被赋予一个向量形式的强度值, 来表示其所占的流场区域内总的涡量, 因而计算中使用的拉格朗日粒子也被称为涡粒子。通过毕奥-萨瓦尔定律, 可由涡粒子的位置和强度求得整个流场的速度分布, 进而由拉格朗日粒子的移动来对流场的对流进行数值模拟。因此, 涡粒子法在模拟涡量场发展的过程中不带有任何先天的数值耗散特性。此外, 涡粒子法充分利用了流场中涡量的局部分布特性, 只在存在涡量的地方布置计算单元 (即涡粒子), 且无穷远处边界条件自动满足, 与传统的基于网格的计算方法 (如RANS、LES、DES) 相比, 使得计算域大为减少。所有的这些特点使得涡粒子法成为精确模拟流场涡结构的理想算法。

涡粒子上携带的涡量按所采用的分布函数形式分布于涡粒子周围, 粒子的核半径决定了其涡量的分布范围。文献[56]在证明涡粒子法收敛性的过程中指出, 为使涡粒子法收敛于纳维-斯托克斯方程的解, 粒子的核半径必须大于粒子间的间距, 该条件通常被称为重叠条件 (overlapping condition)。重叠条件同时使得涡粒子所表示的涡量场具有连续光滑的分布。涡粒子法中, 通过对涡粒子处流场速度、粘性耗散和涡旋拉伸项进行计算, 并依此使得涡粒子位置和强度发生变化, 来达到对涡量场的模拟。以下分不同方面对涡粒子法的研究现状进行描述。

(1) 流场速度与涡旋拉伸计算

流场局部速度由未受扰动的自由来流速度和涡粒子的诱导速度组成, 诱导速度根据比奥-萨伐尔定律, 通过累加所有涡粒子的贡献而得到。当计算涡粒子处诱导速度时, 须考虑所有涡粒子之间的两两成对影响, 若以 N_p 表示涡粒子数量, 则直接计算诱导速度的时间复杂度为 $O(N_p^2)$ 。文献[58, 59]中指出, 可使用[60]中提出的快速多极子算法对涡粒子场的诱导速度进行计算, 将速度计算的时间复杂度降低为 $O(N_p)$, 使得大规模的涡粒子数值计算成为可能。快速多极子算法中, 依据涡粒子的空间位置, 使用八叉树层级结构对三维空间中的涡粒子进行组织, 以粒子簇间的相互影响近似涡粒子个

体之间的相互影响，达到对计算量的降低。

涡旋拉伸项中需要计算流场速度的梯度张量，一般与诱导速度同时进行计算，文献[58, 59]中同样给出了使用快速多极子算法对速度梯度的计算方法。文献[61]中指出，在计算涡旋拉伸项时，使用速度梯度张量的转置代替速度梯度，所得数值方法在理论上是等价的；而使用转置形式可以保证涡粒子法的微分方程组构成涡量输运方程的弱解。所以，现有的涡粒子法程序中多采用速度梯度张量的转置形式。

(2) 粘性耗散计算

涡粒子法的粘性耗散项涉及到涡量的空间微分，在使用粒子离散的涡量场中难以直接计算。在已有文献中，对该项的处理方式可分为两大类，第一类是根据粘性耗散的机理，使用其它方式对粘性耗散进行模拟，从而避开对涡量的微分；另一类是借助数学方法，对涡量的微分进行直接计算。

间接模拟方法包括了随机游走方法（random walk method）、核扩散方法（core spreading method）和涡重分布方法（vortex redistributed method）。

随机游走方法首先在[62]中被应用于二维的涡粒子法，[63, 64, 65]中将其应用到了三维涡粒子法的计算中。该算法的实施过程是在每个时间步中，对粒子位置的各个分量施加一个均值为 0 方差为 $2\nu\Delta t$ 的高斯随机位移，以此来模拟粘性耗散引起的涡量场变化。虽然在粒子数趋于正无穷时，该方法被证明收敛于原涡量输运方程[66]，但是其随机特性会导致涡量场具有很大的噪声[64]，且粒子密度较低的区域内的解会受到很大的负面影响[67]。

核扩散方法是依据扩散方程（diffusion equation）的解析解提出的，当对涡粒子采用高斯核函数时，其核半径平方以2倍流体运动粘性系数的速度增长，以此来模拟粘性耗散过程。文献[68, 67]中指出，若不对涡粒子核半径的上限加以限制，核扩散方法中核半径的不断增大会导致该方法的结果不收敛于纳维-斯托克斯方程。因此，各国学者提出多种限制核半径增长过大的方法，可分为局部调整方法和全局调整方法。局部调整方法是将核半径过大的粒子拆分为多个粒子，并通过调整新粒子的位置和强度使得涡量场性质不变[67, 69]。全局调整方法是重新布置整个计算域内涡粒子的位置和核半径，并通过求解关于新粒子强度的方程组来保证特定位置的涡量不变[70, 71, 58]。局部调整方法使得涡粒子数量急速增长，一般与合并粒子的算法一起使用；全局调整方法更加灵活，但对方程组的求解耗时严重。

涡重分布方法由[72, 73]提出，该方法中涡粒子位置不变，通过将涡粒子强度进行重新分布来模拟粘性耗散。算法实施过程中使用分布系数 f_{ij} 来决定粒子间强度的重分布，将重分布后的涡量场的傅里叶变换与耗散精确解的傅里叶变换进行对比，建立关于 f_{ij} 的线性方程组并求解。该方法中，一个涡粒子的强度只分配到一定距离范围内的涡粒子，且根据稳定性的要求， f_{ij} 不能为负，经常需要插入新的零强度粒子才能达到要求。[72]使用该方法研究了二维点涡的耗散，[74]将该方法应用于三维涡环耗散的模

拟, [75]使用该方法进行了大尺度的工程三维模拟。涡重分布方法不依赖于任何背景网格或涡粒子的规律分布, 并可得到任意阶的精度, 但是求解分布系数 f_{ij} 的过程复杂且耗时, 限制了它的广泛应用。

对耗散项进行直接计算的方法中, 最具代表性的是文献[76]中提出的涡强交换方法 (Particle Strength Exchange, PSE)。该方法的核心是使用积分算子代替拉普拉斯算子, 并使用涡粒子的位置作为数值积分点, 直接由附近涡粒子的信息得到涡量的微分。得益于涡强交换方法的确定性和实现的简易性, 其被广泛应用于涡粒子法的计算中[4, 77, 5, 78, 79, 80, 81]。不同于涡重分布法, 涡强交换方法的精度依赖于分布均匀的粒子, 需要经常采用涡粒子重分布算法对涡粒子的位置进行调整, 且在固体边界处需要进行特殊处理。

(3) 涡粒子重分布过程

如前所述, 作为涡粒子法收敛的必要条件, 重叠条件要求粒子核半径始终大于粒子间距离。而在实际计算中, 流场的局部应变会使得涡粒子在一个方向上聚集, 在其他方向上扩散, 致使粒子间距增大, 重叠条件得不到满足。与此同时, 不规则的涡粒子分布也会对涡强交换方法计算粘性耗散的精度有所影响。上述问题一般通过粒子重分布过程来解决, 即使用规律分布的新涡粒子替代原有涡粒子, 并通过一定算法求得新涡粒子的强度, 使得新旧涡粒子所表示的涡量场基本相同。

涡粒子重分布过程中, 最为普遍的计算新涡粒子强度的方法是空间插值算法。新粒子强度的计算依赖于以相对位置为自变量的插值函数, 并以插值函数为权重对旧粒子强度经过加权求和得到新涡粒子强度。三维空间插值函数一般由三个方向上的一维插值函数进行笛卡尔乘积得到。当新涡粒子的位置是在映射坐标系中确定, 在全局笛卡尔坐标系中不是均匀分布时, 插值需要在使涡粒子均匀分布的映射坐标系中进行[82, 83, 84, 85]。在文献[86, 77]中, 首先使用了可分别使涡量的二阶矩和三阶矩守恒的一维插值函数 Λ_2 和 Λ_3 , 并指出在边界处, 可使用单向插值函数 Λ'_2 。在[87]中, 由[88]提出的用于光滑粒子流体动力学 (SPH) 方法的 M'_4 插值函数被应用于涡粒子强度的插值过

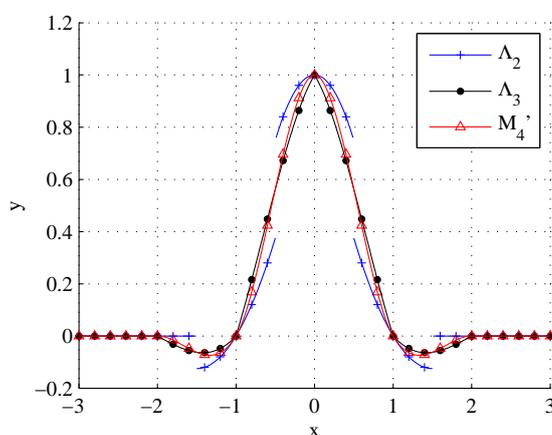


图 1-6 几种不同的一维插值函数

程中。不同插值函数的变化如图1-6所示。由于 M'_4 函数同时具有光滑、连续和保持涡量三阶矩守恒的特点，被广泛应用于涡粒子重分布的插值过程中[6, 78, 82, 83, 89, 84, 85]。

涡粒子重分布过程中，另一种决定新粒子强度的方法是将该问题看作数学上的散乱点插值问题 (scattered data interpolation)，并使用径向基函数 (Radial Basic Function, RBF) 插值技术来进行求解。这种方法直接以涡量场变化最小为目标，文献[70, 71, 90]中的数值计算显示，与传统插值方法相比，该方法显著提升了插值精度。此外，径向基函数插值法不要求规律的涡粒子分布，使得涡粒子分布具有更大的灵活性。然而，径向基函数插值涉及到 N_p 元线性方程组的求解 (N_p 为新涡粒子的数量)，非常耗时，阻碍了该方法的使用。[91]中提到了一些提升计算速度的方法，包括矩阵预处理 (matrix preconditioning)，广义极小残值法 (Generalized Minimal Residual, GMRES) 迭代求解方程组和快速矩阵相乘算法，并且指出径向基函数插值系统的高效求解算法仍在进一步的研究中。

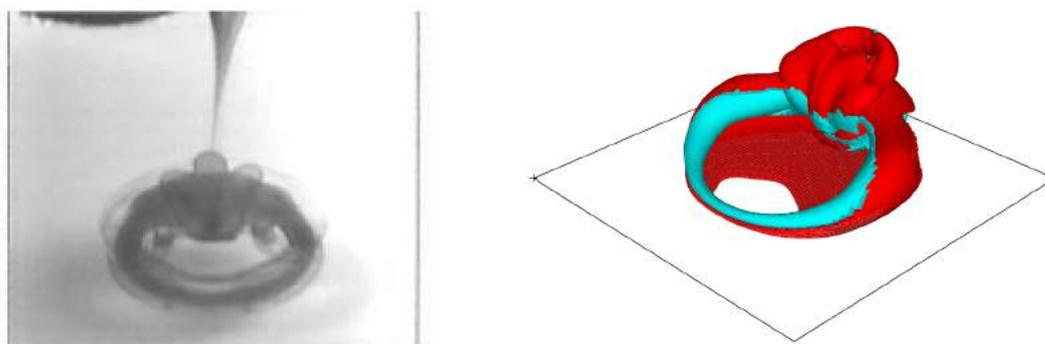
(4) 大涡模拟思想的引入

为了减少计算时间并保证精度，大涡模拟的思想也被引入到了涡粒子法中[92, 93, 94, 95]。借助大涡模拟的思想，涡粒子的间距可适当取大，涡粒子数量相应降低，而小于涡粒子间距的涡的耗散使用亚格子模型来进行模拟。这种处理方法有利于提高计算效率，使得涡粒子法在较大型工程问题中的应用成为可能。涡粒子法中现有的亚格子耗散模型共有两种，一种是 Winckelmans [94] 根据基于网格的传统大涡模拟方法中的 Smagorinsky-Lilly 模型类推到涡粒子法中所得的模型。其观察到经过低通滤波处理的纳维-斯托克斯方程与原纳维-斯托克斯方程相比，形式一样，只是原始变量变成了滤波所得变量，且粘性系数中多了涡粘系数项。所以基于滤波所得的纳维-斯托克斯方程推导出的涡粒子法应与由原始涡粒子法形式相同，只是变量成为解析尺度的变量，且粘性系数中需加入涡粘系数项。而涡粘系数采用大涡模拟中最经典的 Smagorinsky-Lilly (SL) 模型进行计算，即由局部应变矩阵和滤波尺度 (涡粒子核半径) 决定。SL 模型简单且易于实现，但因其在大尺度上的过度耗散而饱受诟病。在文献[7]的涡粒子计算中，Chatelain 采用了超高粘度模型 (hyperviscosity model) 来考虑亚格子的耗散，计算精度被认为要高于 SL 模型。然而超高粘度模型需要涡量的高阶导数 (文献[7]中用到了涡量的四阶导数)，在其计算中，Chatelain 借助了格子涡方法 (Vortex In Cell, VIC)，首先将涡量插值到背景网格节点上，然后在网格节点上计算涡的导数，对于完全无网格的涡粒子法，超高粘度模型仍难以使用。第二种是 Cottet [92] 通过分析对涡粒子进行光滑处理所导致的涡量输运方程的截断误差，提出的一种各向异性的亚格子耗散模型。Cottet 发现光滑处理所导致的误差，在某些方向上具有使涡耗散的效应，而在其他方向上具有反耗散 (antidiffusion) 的效果。所以，通过计算将误差中的反扩散项分量剔除，留下扩散分量，即可得到一种天然的涡粒子法的亚格子耗散模型。Cottet 将该模型应用到了随机初始化的涡量场的模拟，成功地捕捉到了小尺度涡的融合，并避免了对大尺

度涡的影响。上述两种亚格子模型在涡粒子法中都有应用，然而对二者之间的对比研究却仍未有报道。在诸如螺旋桨流场分析这种高雷诺数复杂流场分析中，选择正确的亚格子耗散模型对提高计算效率且维持计算的稳定性具有决定性的影响。

(5) 实际应用与固体边界条件处理

在现有文献中，涡粒子法经常被用来模拟网格方法难以计算的涡结构运动问题。比如[96, 97]中用涡粒子法对单涡环的自诱导运动与发展进行了仿真模拟，所得的移动速度与解析解结果吻合的很好。文献[98]在研究人工嗅觉系统灵敏度的过程中，使用涡粒子法研究了涡环和固体界面碰撞的问题，所得的涡结构和实验中观测到的结果达到了很高的相似度，如图1-7所示，并使用涡粒子法得到了更多的流场细节，发现倾斜方向的入射涡环可以提高人工嗅觉系统的效率。



(a) 实验测试

(b) 计算结果

图 1-7 使用涡粒子法所得的涡环与壁面碰撞过程中的涡结构与实验观察对比（摘自[98]）

涡粒子法还被用来模拟不同涡结构之间的交互作用和涡的拓扑结构的变化，其中 Winckelmans 进行的两个倾斜涡环之间的碰撞和再连接问题是涡粒子法中的经典算例[4, 79]。其使用涡粒子法成功模拟了两个涡环的碰撞和再连接过程，如图1-8所示，定性的重现了文献[99]的实验中观测到的现象。文献[5]使用涡粒子方法对多种初始配置的双涡环碰撞和再连接问题进行了模拟，并根据模拟结果发现：在涡环再连接过程中涡的耗散将会增强，其原因是由于能量被转移到小尺度的涡上并迅速的耗散掉。文献[100]中使用十亿量级的涡粒子对飞机产生的两对反向旋转的涡进行了数值模拟，并考虑了高斯分布的随机速度扰动，观测到了中等波长非稳定性中典型的 Ω 形状的涡结构，如图1-9所示。

由于涡粒子法直接模拟的是流场中的涡量，而非速度，所以并不能将无滑移边界条件作为数学上的边界条件来直接处理，而需要其他的方式来间接实现。这也是涡粒子法一直没能够在工程问题中得到大范围应用的原因之一。为了实现无滑移边界条件，并模拟边界处由之生产的涡量，在涡粒子法的发展历程中，学者们提出了以下三种处理方法：（1）文献[63, 64, 65]中在物体边界处定义一个具有一定厚度的数值边界层，并在这个区域内使用小涡片（vortex tile）对普朗特方程进行求解。每个时间步中，先根据涡粒子和已有的小涡片计算得到边界处的滑移速度，然后在边界上创建新的小涡片来

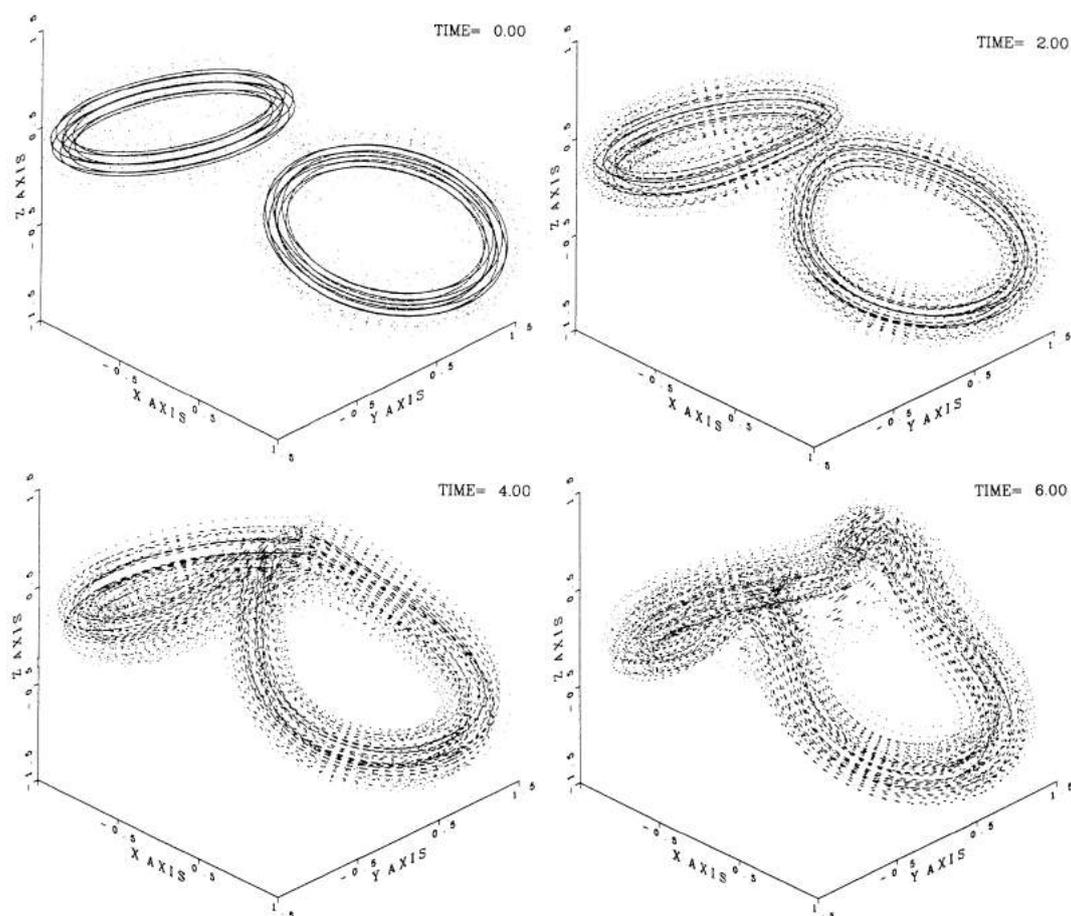
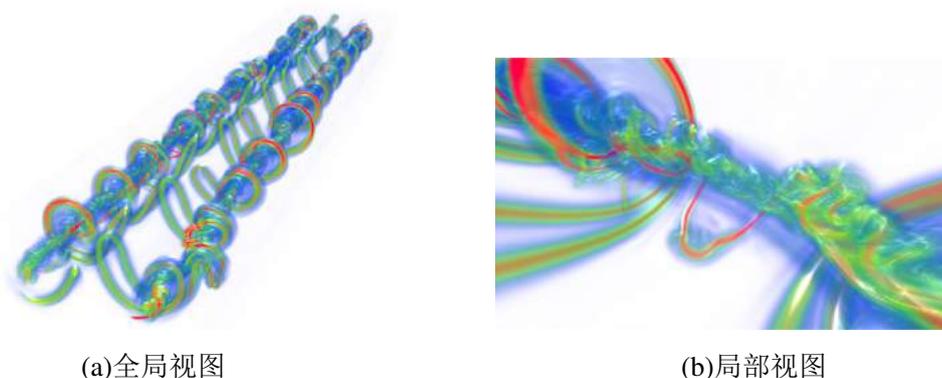


图 1-8 使用涡粒子法所得的倾斜双涡环的碰撞和再连接过程 (摘自[4])

图 1-9 使用涡粒子法得到的飞机机翼产生的 Ω 型涡结构 (摘自[100])

抵消这些滑移速度。在平行于边界的方向上，小涡片以由普朗特边界层理论所得的速度进行移动，在垂直于边界的方向上，涡片以随机漫步的方式进行移动（即位移量为满足高斯分布的随机数）。通过将移出数值边界层的小涡片转化为涡粒子来模拟边界层涡量的产生。该方法严重依赖于数值边界层厚度等参数，且边界仅限于简单的几何形状，进入21世纪以来，已经鲜有使用。（2）文献[101]中在边界上布置一层无厚度的涡片（vortex sheet）来抵消已有的滑移速度，并基于 Lighthill 模型[102]将边界处涡量的法向通量和涡片的强度建立联系。此外，通过使用格林函数法求解具有齐次初始条件和

纽曼边界条件的涡量的扩散方程，建立涡量的法向通量和扩散到边界附近各涡粒子的涡量之间的关系。如此，便可根据每一步中所得的涡片强度对边界附近涡粒子的强度进行修正，以此来模拟由无滑移边界条件产生的涡量。该方法的精度在[103, 104]中得到了进一步的提高，并在[85]中被应用于三维球体绕流的数值模拟中。此方法虽然得到了合理的流场结果，但是由于需要在边界附近布置大量的涡粒子，实施起来计算效率很低。(3) 近期，一种浸入边界法 (Immersed-Boundary Method)，即Brinkman惩罚法 (Brinkman Penalization Method)，被引入到涡粒子法中来考虑固体边界条件[105, 106]。每个时间步中，先不考虑固体，认为固体内部和外部都是流体域，对涡量场和速度场进行求解，然后依据固体内部速度须等于固体速度的要求对涡量场进行迭代修正，从而得到满足边界条件的涡量场。该方法需要涡粒子足够密，以捕捉物体表面形状，又由于当前涡粒子法中的涡粒子基本是等密度分布的，所以对于具有不同几何尺度的复杂边界问题仍然难以使用。

鉴于涡粒子法中处理边界问题的复杂性，以及对复杂形状的物体边界仍无可方案的现状，在许多工程应用中，学者们借助其他算法来处理物体边界，并将其和涡粒子法进行耦合，实现对整个流场的模拟。

文献[6, 7, 8, 9]中将涡粒子法和升力线法耦合，对风力发电机的尾流场进行了模拟。在这些工作中，使用升力线来表示风机的桨叶，使用涡粒子来模拟其泄出的涡。文献[6]中研究了一个独立风机的流场，通过对升力线上的环量添加时间和空间上的扰动来考虑湍流的影响。其成功地再现了各桨叶梢涡的轨迹波动、相互影响、再连接以及到完全三维湍流的转变。文献[7]中对大尺度的空气动力学进行了数值模拟，研究了两个前后布置的风机。其使用相关算法[107]对入口处流场中的湍流进行了合成，并使用涡粒子携带这些湍流涡量进入流场，成功地在考虑流场湍流和尾涡演变的前提下模拟了上游风机对下游风机的影响。

文献[108]中提出了一种将基于网格的 RANSE 求解器和涡粒子法结合的耦合方法。RANSE 求解器用来求解物体周围区域内的流场，涡粒子法用来对整个流场区域进行求解（在物体周围低密度布置）。在 RANSE 求解区域内的涡粒子，强度由 RANSE 结果插值得到。RANSE 求解区域的外侧边界条件（边界上的速度值或流函数值）由涡粒子法直接计算给出。多个二维算例的结果表明，该方法可正确捕捉到物体周围和远场尾流的流场特性，然而[108]中并没有将该方法应用于三维问题。此后，文献[109]将此概念拓展到三维问题中，使用可压缩 RANSE 求解器和涡粒子法进行耦合，分别对机翼和四叶前进直升机螺旋桨周围的流场进行了数值模拟。在计算中，两个区域交界处得到了光滑连续的涡等值面，无扩散的涡核被保持延伸到很远的尾流场中，不同桨叶的泄出涡之间的相互影响也得到了成功的模拟。为了进一步减少 RANSE 求解区域内的非物理的数值耗散，文献[110]在 RANSE 求解区域中数值耗散仍不明显的地方布置了一个封闭的涡粒子播种面 (particle seeding surface)。计算过程中，涡粒子在此播种面上产

生，之后，其强度不再按 RANSE 结果进行调整，而只是按 RANSE 所得速度进行移动。这种处理方法在[10]中也得到了应用，但是[10]中涡粒子系统对 RANSE 求解器的影响方式有所不同。其首先计算出 RANSE 求解区域外的所有涡粒子在每一个 RANSE 求解区域内网格单元上产生的诱导速度，并据此修正每一个网格单元的通量。文献[10]将提出的算法应用到了直升机螺旋桨和机身之间相互影响的模拟中，在模拟过程中螺旋桨和机身产生的涡量都使用涡粒子法来进行表示。文中对两种前进飞行工况进行了模拟，所得机身上测试点处的非稳态压力变化和实验测试结果得到了很好的吻合。

将涡粒子方法与 RANSE 方法进行耦合，虽然取得了一定的成果，但是在三维的问题模拟中，其存在一定的理论缺陷，即涡粒子法中速度的计算须考虑所有流场内涡的影响，而 RANSE 方法只考虑局部相邻网格间的信息交互，无法给出 RANSE 计算域内的涡在涡粒子计算域内产生的诱导速度。此外，与 RANSE 方法的耦合减弱了涡粒子法作为一种无网格方法的优势，重新引入了流体计算域网格划分的工作。

1.2.4 面元-涡粒子耦合算法的研究现状

对于诸如机翼和螺旋桨等升力体，在正常工作情况下，涡是从随边处泄入流场的，借助势流方法（如涡格法、面元法等）便可较好的计算其泄出的涡量。因此，作为一种求解升力体周围流场的途径，可以使用面元法来施加边界条件，并模拟涡的产生，使用涡粒子法来模拟尾流中涡的运动和演变。这种面元-涡粒子耦合算法已经被一些学者用来模拟机翼以及航空螺旋桨的流场[111, 112, 113, 114, 115]。耦合算法中计算元素的分布如图1-10所示，其使用面元法来模拟固体边界，使用涡粒子法来模拟尾涡场中的涡，在升力体随边后方保留两列尾涡面元作为缓冲区，该缓冲区内的尾涡面元一方面用来满足面元法中的库塔条件，另一方面通过转化生成涡粒子，起到从面元系统到涡粒子系统的过渡作用。

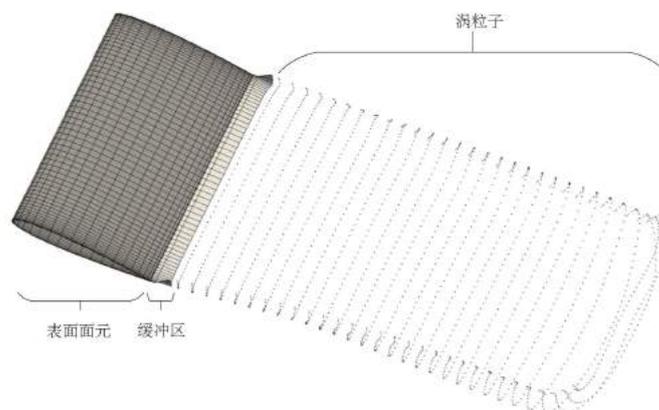


图 1-10 面元-涡粒子耦合算法计算元素分布示意

如图1-11所示，耦合算法的实施过程中需考虑三方面内容：（1）涡粒子系统对面元系统的影响。需计算涡粒子系统在面元控制点上产生的诱导速度，当面元法中采用源

汇-偶极子奇点组合时，在源汇强度的求解过程过将涡粒子产生的诱导速度作为自由来流速度中的一部分来考虑；而在根据伯努利方程求解压力分布时，需将涡粒子产生的诱导速度作为扰动速度的一部分来考虑。(2) 面元系统对涡粒子系统的影响。需计算面元系统在各涡粒子位置处产生的诱导速度及速度梯度，并作为自由来流的一部分加以考虑。(3) 涡粒子的产生，即面元到涡粒子的转换。转换基于 Hess 等效原则进行，即涡强由面元上偶极子分布的表面导数确定。

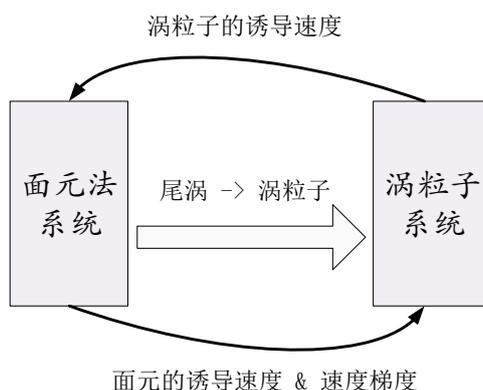


图 1-11 面元-涡粒子耦合算法的耦合框架示意

文献[111]使用面元-涡粒子耦合算法进行了振动翼和翼身问题的模拟计算，并得到了合理的结果。由于低阶面元上的偶极子为常数分布，面元内部偶极子导数为零，涡量只存在于面元的边界线上，所以在该文献中，面元边界线被转换为涡粒子，且一条边界对应一个涡粒子，如图1-12所示。该文献中使用的涡粒子法中并没有考虑粘性，同时缺乏计算结果和实验结果的对比。文献[116]中使用高阶面元法与涡粒子法进行耦合，但仍未考虑粘性。清华大学的谭剑锋、王浩文等人[112, 113]在考虑粘性的前提下，应用面元-涡粒子耦合方法模拟了直升机螺旋桨在盘旋和前进飞行过程中的非稳态空气动力学，桨叶的梢涡与根涡都在计算中得到了重现。文中所得的桨叶截面压力分布和截面推力系数和实验结果吻合较好，同时将计算所得的受干扰的进流速度分布与实验测试进行了对比。但该文中并未详细讨论面元-涡粒子的转换问题。文献[114]在研究风力机风轮气动性能中同样使用了面元-涡粒子耦合算法，采用了将面元边界转换为涡粒子的方法，对比了风轮截面上压力分布，轴向推力以及轴扭矩和对应的实验测试结果。西北工业大学王红波、祝小平等人[115]应用面元-涡粒子耦合算法研究了无人机螺旋桨滑流与机翼的气动干扰，文中将计算所得的翼型 E387 和双矩形桨叶螺旋桨的表面压力及总体性能和实验测试结果进行对比，取得了较好的结果。

已有文献中主要集中于对升力体总体性能的估计，而缺少对面元-涡粒子耦合算法所得的尾流场的详细分析与研究，只有[113]中将预测得到梢涡位置与实验进行了对比。然而，涡粒子法的优点在于其可以准确的模拟流场涡结构及其演变，研究并分析计算所得的尾流场，提高尾流场的模拟精度，不但可以改善对总体性能的预测精度，也能

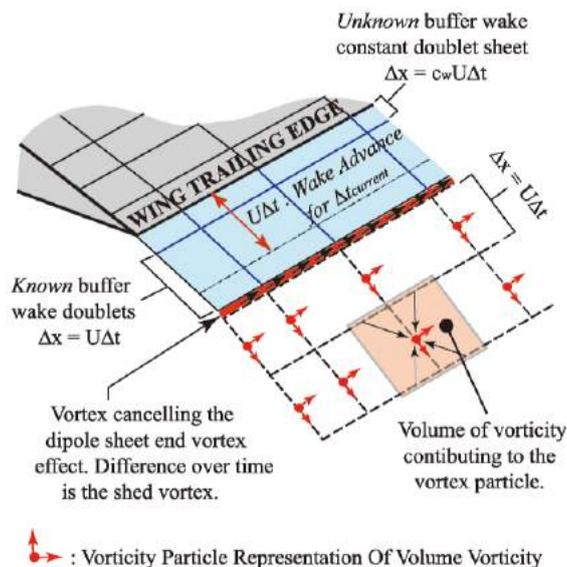


图 1-12 面元边界线到涡粒子的转换（摘自[111]）

够为未来应用涡粒子法计算螺旋桨的涡致振动、流噪声及结构间干扰方面的应用奠定基础 and 提供指导。

面元到涡粒子的转换过程中，转换得到的涡粒子是位于原尾涡面上的一层涡粒子，所以涡粒子的核半径就决定了涡量在原面元法向方向上的分布范围，即尾涡粘性层的厚度。由于转换所得涡量的总量是不变的，涡粒子的核半径将会影响流场中涡强的大小。在已有文献中，对此问题还未有研究。根据涡粒子法的重叠条件要求，涡粒子核半径必须大于涡粒子间距离，要想分析不同核半径的影响，就必须使得涡粒子间距离可以变化，这要求将一个面元转换为多个涡粒子。已有文献中只有[116]提到将一个面元转换为多个涡粒子，但其基于复杂的高阶面元法。所以，研究一种新的一对多的低阶面元到涡粒子的转换算法，成为研究面元-涡粒子耦合算法尾流分析精度的必要前提条件。

此外，由于螺旋桨梢涡处流场局部应变剧烈，转换所得的规律分布的涡粒子将很快变的不规律，间距明显增大，从而导致所表示的涡量场不连续，并影响数值计算的精确性和稳定性。这就需要使用到涡粒子重分布算法，然而有关面元-耦合算法的文献中，对此没有任何描述。

对于螺旋桨计算，可使用旋转周期性边界条件来减少计算量，从而在相同的计算能力情况下可以进行更加精确的计算，而有关涡粒子法和面元-涡粒子耦合算法的文献中对旋转周期性边界条件的实施都还未有研究。

1.3 问题的提出

随着对海洋航行器长航程及隐秘性等方面的要求的不断提高，螺旋桨的效率、梢涡空化、噪声和振动特性等得到越来越多的关注，这就要求在设计阶段，数值方法可以准确地预测螺旋桨的水动力性能及其周围的流场细节，而这些都需要对尾流场的涡

分布具有精确的模拟能力。

传统的面元法基于无粘不可压理想流体，对尾涡使用无耗散的偶极子面元进行近似，难以准确模拟尾流涡场。粘流计算方法依赖于高质量的流体计算域网格，既需要经验又耗费时间，且其固有的数值耗散特性不利于涡场的精确模拟。将面元法和无网格的涡粒子方法进行耦合，对螺旋桨的流场和水动力性能进行分析，既可摆脱繁琐的网格划分工作，又同时具有较高的分析精度。

总结对研究现状的分析，可以发现，在有关螺旋桨流场和水动力分析的面元法、涡粒子法及其耦合算法的研究中，还存在如下问题：

(1) 面元法中现有的压力库塔条件实现算法，由于采用差商近似法对雅可比矩阵进行计算，其计算效率十分低下，且在重载情况下易发生不收敛现象。此外，低阶面元法中使用的常值速度光滑参数，缺少确定在不同工况下其合适取值的模型，且存在在上游区域取值过大而在下游区域过小的问题。

(2) 涡粒子法中现有两种亚格子耗散模型，即Smagorinsky-Lilly亚格子耗散模型和Cottet人工粘性模型，然而公开文献中缺少对二者的对比研究。这使得在实际应用中，无法进行合理的选择。

(3) 有关面元-涡粒子耦合算法的研究中，仍未有关于涡粒子密度等参数对尾流场涡量分布和水动力性能影响的研究，同时也缺少开展此研究所必须的低阶面元到涡粒子的一对多转化算法。

(4) 现有的涡粒子法和面元-涡粒子耦合算法中，还未有有关实施旋转周期性边界条件的研究，然而在螺旋桨的稳态分析中，旋转周期性边界条件可大幅降低计算量，从而在相同的计算能力情况下可进行更加精确的计算。

本文将针对上述问题，分别进行研究和改进。

1.4 主要研究内容与安排

本文研究用于螺旋桨水动力性能与流场分析的面元-涡粒子耦合算法，主要包括以下内容：

(1) 介绍了国内外关于船舶螺旋桨水动力性能和尾流场分析的研究进展与现状，分析了国内外学者在研究中所采用的不同方法和目前存在的问题，着重介绍了面元法、涡粒子法以及面元-涡粒子耦合算法的研究进展，提出了现有仍研究中存在的问题。

(2) 针对面元法，提出了一种计算压力库塔条件中雅可比矩阵的解析方法，依此建立了快速的压力库塔条件实现算法，并对比了其与传统算法在螺旋桨分析过程中的计算效率和收敛能力。此外，基于量纲分析法，提出了一种可变速度光滑参数模型，并给出了自适应确定模型中参数大小的方法。通过对多个螺旋桨的水动力性能计算，分析了所得面元法的适用性。

(3) 分别使用基于 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型和 Cottet 人工粘性模型的涡

粒子法，对两种不同的涡环碰撞问题进行了数值模拟，依据两种模型所得的涡结构变化过程以及模拟过程中守恒量的变化，对两种模型在维持计算稳定性和计算效率方面进行了对比分析。

(4) 在低阶面元-涡粒子耦合算法中，通过在面元上对偶极子强度进行二维插值，实现了一对多的低阶面元-涡粒子转化算法。针对螺旋桨尾涡面元尺寸差异较大的情况，提出了单个面元对应涡粒子数量自适应确定的方法。提出了针对面元-涡粒子耦合算法的涡粒子重分布算法，并详细介绍了其流程。以椭圆水翼的水动力性能和尾流涡场的分析为例，分析了耦合算法中涡粒子密度等参数对算法计算结果的影响。

(5) 在面元-涡粒子耦合算法中实现旋转周期性边界条件，针对其所导致的扇形柱体计算域，提出在柱坐标系下的涡粒子均布方法，并建立了考虑旋转周期性边界条件的扇形区域涡粒子重分布算法。对计算流场速度的快速多极子算法进行了适应旋转周期性边界条件的改进，并对算法的改进效果进行了分析研究。通过对不同螺旋桨的水动力性能和尾流场的数值分析及与实验结果的对比，验证了所得面元-涡粒子耦合算法的有效性。

本文的组织结构如图1-13所示。

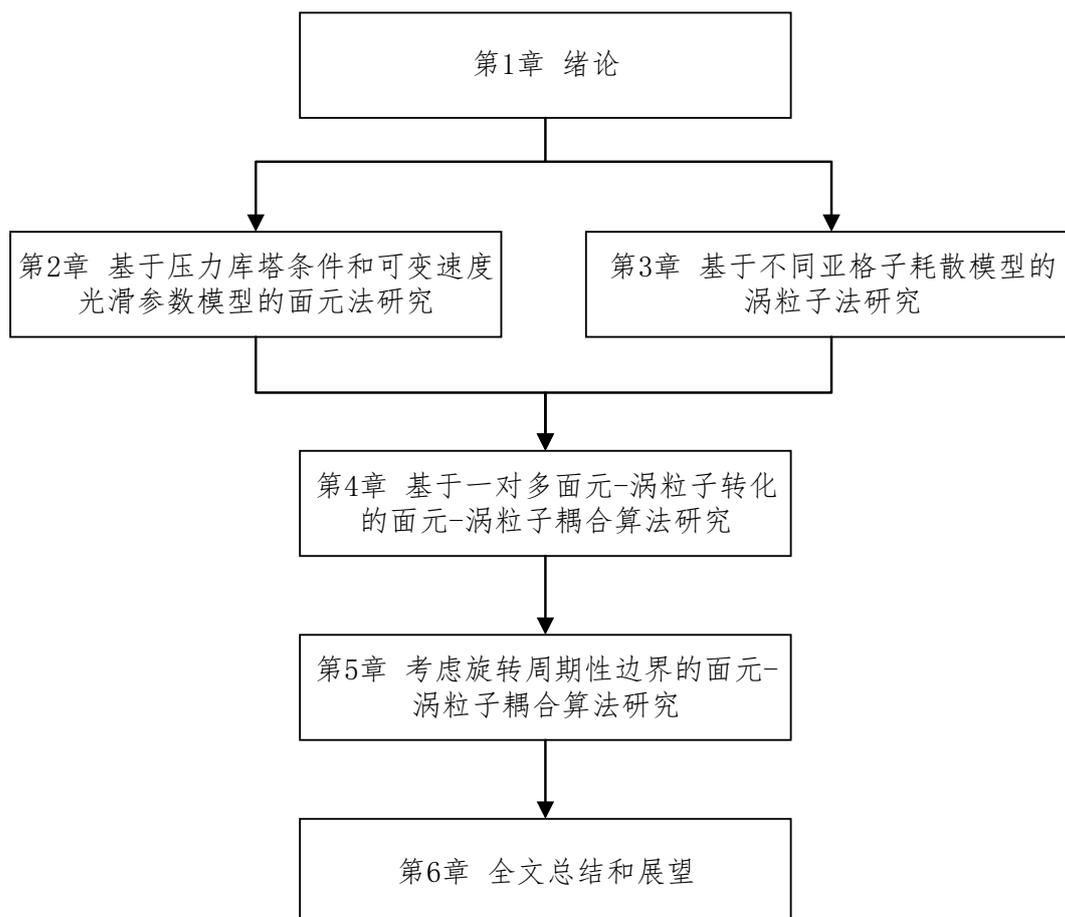


图 1-13 全文组织结构

1.5 本章小结

本章对螺旋桨水动力性能及流场分析方法的研究现状进行了描述，得出结论：使用面元-涡粒子耦合算法对螺旋桨的水动力性能及流场进行分析，既不用进行繁琐的网格划分工作，又预期可以得到较为精确的结果。本章还对面元法、涡粒子法及耦合算法的研究现状进行了详细分析，本文将针对现有研究中存在的相关问题展开研究。

第 2 章 基于压力库塔条件和可变速度光滑参数模型的面元法研究

面元法是当前进行螺旋桨分析的势流方法中最精确的方法，本文耦合低阶面元法与涡粒子法，来分析螺旋桨的水动力性能和尾流场。涡粒子由面元法中具有偶极子强度的尾涡面元转化得到，所以面元法中尾涡面元上的偶极子强度及尾涡面元位置对耦合算法的精确性有着重要影响。在面元法中，使用非线性压力库塔条件，可以使得尾涡面元上的偶极子强度更精确，但现有压力库塔条件的实现算法过于耗时，所以本章提出一种快速压力库塔条件实现算法；此外，尾涡面元位置通过尾涡对齐过程确定，该过程中要使用到速度光滑模型来对诱导速度的计算去奇异化，传统的常值速度光滑参数模型存在诸多缺点，本章将提出一种自适应的可变速度光滑参数模型，以提高尾涡面元位置的预测精度。

为表述方便，在关于螺旋桨的讨论中将不加说明的使用以下符号：

进速比：

$$J = \frac{v_a}{nD} \quad (2-1)$$

推力系数：

$$K_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} \quad (2-2)$$

扭矩系数：

$$K_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5} \quad (2-3)$$

效率：

$$\eta = \frac{T v_a}{Q w} = \frac{J K_T}{2\pi K_Q} \quad (2-4)$$

式中 v_a 为螺旋桨前进速度， w 和 n 分别是以弧度每秒（radian/s）和转每秒（rps）为单位的螺旋桨转速， D 表示螺旋桨直径， ρ 表示流体密度， T 和 Q 分别为推力和扭矩。

2.1 面元法基础理论

(1) 数学方程的建立

流场中的速度可以表示为

$$\mathbf{u}_{tot} = \mathbf{u}_{\infty} + \mathbf{u}_{ind} \quad (2-5)$$

式中 \mathbf{u}_{tot} 是总的速度， \mathbf{u}_{∞} 是未受扰动的流场速度， \mathbf{u}_{ind} 是扰动速度（或诱导速度）。当使用旋转坐标系时，因为坐标系的运动而引起的速度也包括在 \mathbf{u}_{∞} 中。

面元法基于势流理论对无粘不可压流场进行分析，扰动速度满足

$$\mathbf{u}_{ind} = \nabla \phi \quad (2-6)$$

式中 ϕ 表示扰动速度势，并满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2-7)$$

应用格林第二定理，拉普拉斯方程的解可由边界上的函数值和法向导数确定[117]。式 (2-7) 的解可表示为：

$$E\phi_p = \iint_{S_B} \left[\phi_q \frac{\partial G(p, q)}{\partial \mathbf{n}_q} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}_q} G(p, q) \right] dS + \iint_{S_W} \Delta \phi_q \frac{\partial G(p, q)}{\partial \mathbf{n}_q} dS \quad (2-8)$$

式中 S_B 是固体的表面（即流场的边界）， S_W 是由随边泄出的尾涡面（势流场的边界）， \mathbf{n} 为边界的单位法向量， $G(p, q)$ 在三维中定义为 $-1/R(p, q)$ ，其中 $R(p, q)$ 是两个点 p 和 q 之间的距离， q 点遍历所积表面 S_B 或 S_W 。式 (2-8) 中 E 是一个与点 p 位置有关的常数，其定义如下

$$E = \begin{cases} 0 & p \text{ 在流体域外部,} \\ 2\pi & p \text{ 在流体域边界上,} \\ 4\pi & p \text{ 在流体域内部.} \end{cases}$$

尾涡面用来模拟从随边泄出的尾涡，即一层厚度较小的薄层粘流区域，其内部流场为有旋场，势流理论不再适用，所以用尾涡面表示的势流计算域边界来对其进行模拟，尾涡面的位置如图2-1所示。尾涡面正反两侧所表示的流体边界在几何上是重合的，两侧速度势总的影响由速度势突变 ($\Delta\phi$) 来表示。

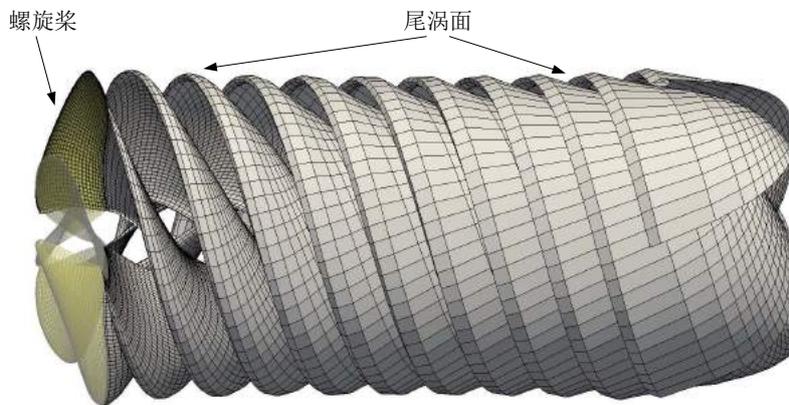


图 2-1 面元法中的尾涡面

固体边界上的无渗透边界条件为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_\infty. \quad (2-9)$$

假设固体表面内侧的扰动速度势为0，则固体表面外侧的扰动速度势等于固体表面两侧的速度势突变。据此，将固体表面和尾涡面离散成面元（Boundary Element），并在面元上布置常值的偶极子和源汇，使用偶极子强度的相反数 $-\mu$ 来表示速度势突变 ($\phi^+ - \phi^-$ 或 $\Delta\phi$)，使用源汇强度 σ 来表示速度势法向导数的相反数 ($-\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$)，对每个

固体表面面元控制点（即几何中心点）处的速度势建立方程，可由式（2-8）得到以下线性方程组

$$(C_B + I)\boldsymbol{\mu}_B + C_W\boldsymbol{\mu}_W = -B\boldsymbol{\sigma} \quad (2-10)$$

式中 I 是单位对角矩阵， $\boldsymbol{\mu}_B$ 和 $\boldsymbol{\mu}_W$ 分别是固体表面面元和尾涡面元的偶极子强度组成的向量， $\boldsymbol{\sigma}$ 是固体表面面元的源汇强度组成的向量，根据式（2-9），有 $\sigma_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}_\infty$ 。 C_B 和 C_W 分别是固体表面面元和尾涡面元对控制点的诱导速度势系数组成的矩阵， B 是固体表面面元的源汇对控制点的诱导速度势系数组成的矩阵。诱导速度势系数定义为面元上的偶极子或者源汇强度为1时，在场点（需要计算诱导速度势或者速度的点）处产生的速度势。偶极子面元在场点 p 的诱导速度势系数定义为

$$\frac{\phi_\mu}{\mu} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{panel}} \frac{\partial G(p, q)}{\partial \mathbf{n}_q} dS \quad (2-11)$$

源汇面元的诱导速度势系数定义为

$$\frac{\phi_\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{panel}} G(p, q) dS \quad (2-12)$$

式（2-11）和式（2-12）中点 $G(p, q)$ 定义同式（2-8），点 q 遍历面元的表面 S_{panel} 。三维四边形面元的诱导速度势系数详细计算公式参见[118, 119]。

（2）方程组的封闭

假设螺旋桨叶面上，径向面元数为 N_R ，弦向面元数为 N_{chord} ，则桨叶上面元总数为 $N_B = N_R N_{chord}$ ，式（2-10）中的方程总数和 $\boldsymbol{\mu}_B$ 的维度都等于 N_B 。在非定常计算中，尾涡面元上的偶极子强度 μ_W 随尾涡面元一起向下游移动，所以只有毗邻随边上的尾涡面元的偶极子强度是未知的（数量为 N_R ），而其他尾涡面元上的偶极子强度可根据之前时间步的计算获得。在定常计算中，认为偶极子强度在所有的从同一随边位置泄出的尾涡面元上是相等的，只在径向发生变化，所以 $\boldsymbol{\mu}_W$ 中的未知数同样有 N_R 个。

综上，在式（2-10）所表示的方程组中，未知数的数量（ $N_B + N_R$ ）大于方程数量（ N_B ），需要添加其他方程才能封闭。借助库塔-茹科夫斯基条件（简称为库塔条件），可建立尾涡面元上的偶极子强度 $\boldsymbol{\mu}_W$ 与固体表面面元偶极子强度 $\boldsymbol{\mu}_B$ 之间的关系，使得方程组封闭。库塔条件的具体内容为：升力体随边处的速度不能无限大。在面元法中，有两种库塔条件的数值形式。第一种是线性形式的，由 Morino 在[120]中提出，具体要求为毗邻随边的尾涡面元上的偶极子强度等于随边处吸力面和压力面面元上的偶极子强度之差，即

$$\mu_{W,i} = \mu_{B,i}^+ - \mu_{B,i}^-, \quad i = 1, \dots, N_R \quad (2-13)$$

式中， $\mu_{B,i}^+$ 和 $\mu_{B,i}^-$ 分别为径向第 i 层面元随边处吸力面和压力面面元上的偶极子强度， $\mu_{W,i}$ 是该处泄出的尾涡面元上的偶极子强度。第二种库塔条件的形式是非线性的，经常被称为压力库塔条件，其具体要求为在随边处，压力面和吸力面的压强相等，即

$$\Delta p_i = p_i^+ - p_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, N_R. \quad (2-14)$$

压力库塔条件所得结果更加接近物理实际，但传统的压力库塔条件数值实现过程非常耗时，本文提出一种快速压力库塔条件实现算法，将在2.2节进行详细讨论。

(3) 水动力性能计算

确定了桨叶（固体）表面面元的偶极子强度后，便可得到桨叶表面的扰动速度势以及速度，据此计算桨叶表面的压强分布和螺旋桨的水动力性能。

桨叶表面的压强可根据伯努利方程求得，即：

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{u}_\infty^2 - \mathbf{u}_{tot}^2) - \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (2-15)$$

式中 ρ 、 p 、 \mathbf{u}_{tot} 和 ϕ 分布表示当地的流体密度、压强、相对于螺旋桨的流体速度和扰动速度势， p_∞ 和 \mathbf{u}_∞ 分别表示未受扰动的流场中的压强和相对速度。桨叶表面的扰动速度势等于当地偶极子强度的相反数。

总的流场速度为未受扰动速度和扰动速度之和，扰动速度等于扰动速度势的梯度。由于固体表面相对速度的法向分量为零，可直接计算扰动速度势在固体表面上的梯度得到切向的扰动速度，与未受扰动的切向速度相加后即为总的流场速度，即

$$\mathbf{u}_{tot} = \mathbf{u}_{ind,t} + \mathbf{u}_{\infty,t} = \nabla_s\phi + \mathbf{u}_{\infty,t} \quad (2-16)$$

式中， $\mathbf{u}_{ind,t}$ 和 $\mathbf{u}_{\infty,t}$ 分别是对应速度的切向分量， ∇_s 表示固体表面上的梯度。

在计算 $\nabla_s\phi$ 时，根据当前面元与临近面元的控制点的位置，确定两条弧线（用三个点确定一个二阶弧线） s_1 与 s_2 ，如图2-2所示。然后以弧线长度为自变量，用二阶数值微分方法求得每个弧线上扰动速度势 ϕ 的导数，即 ϕ 在当前面元控制点处的沿弧线切线方向的方向导数。分别用 ϕ_{s1} 和 ϕ_{s2} 表示上述的两个方向导数，以 \mathbf{e}_{s1} 和 \mathbf{e}_{s2} 表示两个弧线在控制点处的切线方向。为求解表面上的全导数，需知道一对相互垂直的方向上的方向导数，取一对相互垂直的方向 \mathbf{e}_x 和 \mathbf{e}_y ，并令 \mathbf{e}_x 和 \mathbf{e}_{s1} 重合，如图2-2所示。则在 \mathbf{e}_x 和 \mathbf{e}_y 方向上的扰动速度势的导数为[41]:

$$\phi_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi_{s1} \quad (2-17)$$

$$\phi_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\phi_{s2} - (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{s1})\phi_{s1}}{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{s2}} \quad (2-18)$$

然后，可依据下式求得扰动速度的切向分量:

$$\mathbf{u}_{ind,t} = \phi_x\mathbf{e}_x + \phi_y\mathbf{e}_y. \quad (2-19)$$

面元上所受的粘性摩擦力根据摩擦系数进行计算，即

$$\mathbf{F}_f = 0.5\rho S_p C_f |\mathbf{u}_{tot}| \mathbf{u}_{tot} \quad (2-20)$$

式中 S_p 为面元的面积， C_f 为局部摩擦系数，由经验公式求得，即[121]

$$C_f = (\log_{10} \text{Re} - 0.65)^{-2.3} \quad (2-21)$$

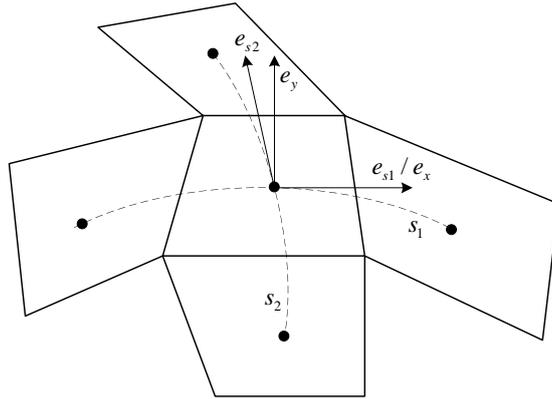


图 2-2 表面导数求解中的坐标系

式中 Re 为面元上的局部雷诺数。

(4) 尾涡对齐算法

尾涡面的正确位置直接影响到流场的正确描述。由于泄出涡随流体运动，尾涡面应与局部流场速度方向相切。尾涡对齐算法就是指求得满足上述局部相切条件的尾涡面位置的迭代过程。在尾涡对齐迭代的每一步中，都依据当前步的尾涡面位置，求解有关偶极子强度的方程组，并计算螺旋桨的水动力性能。然后使用所得偶极子强度计算尾涡面元上的流场速度，并根据特定算法更新尾涡面位置。如此重复，直到尾涡面位置或者水动力性能达到收敛。

尾涡面须满足的条件可表示为：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}_{tot}(\mathbf{x}) \quad (2-22)$$

式中 \mathbf{x} 表示尾涡面上任意一点的位置， $\mathbf{u}_{tot}(\mathbf{x})$ 表示该点处总的流场速度。

对式 (2-22) 使用尾涡面元节点进行数值离散，即可得到非定常的尾涡对齐算法。应用向前欧拉公式，可以得到

$$\mathbf{x}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \mathbf{u}_{tot}(\mathbf{x}_i^n)\Delta t \quad (2-23)$$

式中 \mathbf{x}_i 表示随边后方第 i 列的尾涡节点，上标 n 和 $n+1$ 表示迭代步数， Δt 表示时间步长。

对式 (2-23) 进行略微的改动，可以得到

$$\mathbf{x}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{x}_i^{n+1} + \mathbf{u}_{tot}(\mathbf{x}_i^n)\Delta t, \quad (2-24)$$

依据此式，可得到一种新的适用于定常计算的尾涡对齐算法，可称其为位移累积方法 (Displacement Accumulation Method, DAM)。数值计算结果显示，在敞水性能的计算中，非定常的尾涡对齐算法往往需要上百步才能收敛，而位移累积方法可在 20 步以内收敛，使得计算效率得到显著提升，所以，在本文有关敞水性能的计算中，均采用位移累积方法，而对船后螺旋桨性能的计算中，使用非定常的尾涡对齐算法。

尾涡对齐过程中，在计算流场速度时，须使用速度光滑模型对涡线段产生的诱导速度进行去奇异化，已有文献中均使用常值速度光滑参数，对尾涡面元位置的预测精度具有一定影响。针对此，本文提出一种自适应可变速度光滑参数模型，将在2.3节进行详细讨论。

2.2 快速压力库塔条件实现算法

压力库塔条件的要求是随边处的吸力面和压力面压力差为零，其实现过程是通过牛顿迭代求解满足条件的尾涡面元偶极子强度。迭代过程中，计算时间主要消耗在两方面，一是雅可比矩阵的计算，二是每一步中由尾涡面元偶极子强度更新桨叶表面偶极子强度的计算。传统的压力库塔条件实现算法中，使用差商近似法计算雅可比矩阵，通过解线性方程组更新桨叶表面偶极子强度，都很耗费时间。

本节首先介绍压力库塔条件的迭代实现方法，然后分别提出雅可比矩阵的解析求解方法和更新桨叶表面偶极子强度的偶极子增量法，结合二者得到快速压力库塔条件实现算法，最后通过实例分析验证所提算法的高效性。

2.2.1 压力库塔条件的迭代实现方法

由 Morino 提出的线性库塔条件会导致随边处的吸力面和压力面压强不相等，应用压力库塔条件则可以得到更加符合实际情况的结果。压力库塔条件要求在随边处的吸力面和压力面压强相等，即

$$\Delta p_i = p_i^+ - p_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, N_R. \quad (2-14)$$

由于压强和偶极子强度之间的关系是非线性的，方程 (2-10) 和方程 (2-14) 构成的方程组也是非线性的，一般使用牛顿迭代进行求解[39, 50]。

若将式 (2-10) 中的尾涡面偶极子强度向量 $\boldsymbol{\mu}_W$ 分为已知量 $\boldsymbol{\mu}_{wake,known}$ 和未知量 $\boldsymbol{\mu}_{wake}$ ，并将二者对应的诱导速度势影响系数矩阵分别记为 $C_{wake,known}$ 和 C_{wake} ，则面元法的基本方程组可表示为

$$A\boldsymbol{\mu}_B + C_{wake}\boldsymbol{\mu}_{wake} + C_{wake,known}\boldsymbol{\mu}_{wake,known} + B\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2-25)$$

式中 $A = C_B + I$ ，其他符号的含义同式 (2-10)。

将式 (2-25) 中的已知量移到等式右侧并合并为 \mathbf{R}_1 ，则式 (2-25) 可简化为：

$$A\boldsymbol{\mu}_B = -C_{wake}\boldsymbol{\mu}_{wake} + \mathbf{R}_1. \quad (2-26)$$

根据上式，可以将桨叶表面偶极子强度 $\boldsymbol{\mu}_B$ 看作未知尾涡面偶极子强度 $\boldsymbol{\mu}_{wake}$ 的函数，桨叶表面的压强由 $\boldsymbol{\mu}_B$ 确定，结合式 (2-14)，可将随边处压强差 Δp_i 看作 $\boldsymbol{\mu}_{wake}$ 的函数。所以，可以将非线性库塔条件方程组的求解问题，看作一个非线性多维函数求根的问题。这种问题可使用牛顿迭代算法进行求解，具体过程为：

$$\boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k)} - [J^{(k)}]^{-1} \Delta \mathbf{p}^{(k)} \quad (2-27)$$

式中, k 表示迭代步数, $J^{(k)}$ 表示雅可比矩阵, $\Delta p^{(k)}$ 表示对应于当前解 $\mu_{wake}^{(k)}$ 的随边处压强差。偶极子强度的初始值 $\mu_B^{(0)}$ 和 $\mu_{wake}^{(0)}$ 通过线性库塔条件求得。

雅可比矩阵中的元素的定义为:

$$J_{i,j}^{(k)} = \frac{\partial \Delta p_i^{(k)}}{\partial \mu_{wake,j}^{(k)}}. \quad (2-28)$$

在传统方法中, 雅可比矩阵的元素是通过数值差商进行近似的, 即:

$$J_{i,j}^{(k)} = \frac{\Delta p_i^{\beta,j} - \Delta p_i^{(k)}}{\mu_{wake,j}^{\beta,j} - \mu_{wake,j}^{(k)}} \quad (2-29)$$

式中 $\Delta p_i^{(k)}$ 和 $\Delta p_i^{\beta,j}$ 分别对应于 $\mu_{wake}^{(k)}$ 和 $\mu_{wake}^{\beta,j}$, $\mu_{wake}^{\beta,j}$ 是通过对 $\mu_{wake}^{(k)}$ 的第 j 项进行扰动得到的向量, 其定义为:

$$\begin{aligned} \mu_{wake,j}^{\beta,j} &= (1 - \beta)\mu_{wake,j}^{(k)} \\ \mu_{wake,l}^{\beta,j} &= \mu_{wake,l}^{(k)} \quad \text{当 } l \neq j \text{ 时.} \end{aligned} \quad (2-30)$$

式中 β 一般取值为 0.01。

上述的雅可比矩阵的差商近似方法需要对每个 j 对应的 $\mu_{wake}^{\beta,j}$ 进行一次方程组 (2-26) 的求解。也就是说, 计算一次雅可比矩阵需要求解 N_R 次方程组, 非常耗时。所以在实际计算中, 多使用修正的牛顿迭代算法[39, 50], 即只计算第一步中的雅可比矩阵 $J^{(0)}$, 后续的迭代中使用 $J^{(0)}$ 来近似 $J^{(k)}$ 。文献[41]中则进一步减少雅可比矩阵的计算次数, 只在前三步的尾涡对齐中计算雅可比矩阵, 之后都使用第三步中所得的雅可比矩阵。上述方法在减少雅可比矩阵计算次数的同时, 也影响到了牛顿迭代的收敛速度甚至收敛性。本文提出一种求解雅可比矩阵的解析方法, 在提高雅可比矩阵的计算精度的同时, 可使得雅可比矩阵的计算时间降低5个量级, 解决了雅可比矩阵计算次数和收敛速度之间的矛盾。下面对该解析方法进行描述, 出于简洁考虑, 下面描述中的符号表示省略了迭代步数 k 。

2.2.2 压力库塔条件中雅可比矩阵的解析求解方法

对式 (2-28) 中的导数进行展开, 雅可比矩阵的元素可表示为:

$$\begin{aligned} J_{i,j} &= \frac{\partial(p_i^+ - p_i^-)}{\partial \mu_{wake,j}} \\ &= \frac{\partial p_i^+}{\partial \mu_{wake,j}} - \frac{\partial p_i^-}{\partial \mu_{wake,j}}. \end{aligned} \quad (2-31)$$

所以, 只要能够计算出桨叶表面压力对尾涡面元偶极子强度 μ_{wake} 的导数, 就可以得到雅可比矩阵。

根据链式求导法则，可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \mu_{wake,j}} &= \sum_{l=1}^{N_B} \frac{\partial p}{\partial \mu_{B,l}} \frac{\partial \mu_{B,l}}{\partial \mu_{wake,j}} \\ &= \sum_{l=1}^{N_B} \left[\frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}_{tot}^2} \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{tot}^2}{\partial u_{ind,t,m}} \frac{\partial u_{ind,t,m}}{\partial \mu_{B,l}} \right) + \frac{\partial p}{\partial \phi_t} \frac{\partial \phi_t}{\partial \mu_{B,l}} \right] \frac{\partial \mu_{B,l}}{\partial \mu_{wake,j}} \end{aligned} \quad (2-32)$$

式中， p 表示桨叶表面的压强， $u_{ind,t,m}$ 表示切向诱导速度的第 m 个分量， ϕ_t 表示扰动速度势的时间导数。需要指出的是，虽然没有上下标来标识，但式 (2-32) 中的 p 、 \mathbf{u}_{tot} 、 $v_{ind,m}$ 和 ϕ_t 对应于同一个面元。下面，对式 (2-32) 中的各项进行逐项的推导。

(1) 导数 $\frac{\partial \mu_{B,l}}{\partial \mu_{wake,j}}$ 的推导

式 (2-26) 可改写为：

$$\boldsymbol{\mu}_{body} = -A^{-1}C_{wake}\boldsymbol{\mu}_{wake} + A^{-1}\mathbf{R}_1. \quad (2-33)$$

因为 \mathbf{R}_1 与 $\boldsymbol{\mu}_{wake}$ 无关，可以得到：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}_B}{\partial \boldsymbol{\mu}_{wake}} = J^\mu = -A^{-1}C_{wake}. \quad (2-34)$$

$$\frac{\partial \mu_{B,l}}{\partial \mu_{wake,j}} = J_{l,j}^\mu. \quad (2-35)$$

式中， J^μ 是定义为式 (2-34) 的新引入的雅可比矩阵，注意与牛顿迭代中的雅可比矩阵 $J^{(k)}$ 进行区分。

系数矩阵 A 只和桨叶表面面元的位置有关，在刚体的计算过程中保持不变，所以 A^{-1} 在一个算例中只需要计算一次。 C_{wake} 依赖于尾涡面元和桨叶表面面元的位置，在线性库塔条件的实施中已经得到，并不需要额外的计算时间。综上，对 J^μ 的计算只需要一次矩阵乘法。

(2) 导数 $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}_{tot}^2}$ 、 $\frac{\partial p}{\partial \phi_t}$ 和 $\frac{\partial \phi_t}{\partial \mu_{B,l}}$ 的推导

在2.1节中提到，桨叶表面的压强根据下面的伯努利方程计算

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{u}_\infty^2 - \mathbf{u}_{tot}^2) - \rho\frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2-15)$$

根据此式，可以得到：

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{u}_{tot}^2} = -0.5\rho \quad (2-36)$$

和

$$\frac{\partial p}{\partial \phi_t} = -\rho. \quad (2-37)$$

导数项 $\frac{\partial \phi_t}{\partial \mu_{B,l}}$ 依赖于所采用的计算时间导数的数值微分公式。以四阶向后微分公式为例[122]，微分公式为：

$$\phi_t = \frac{25}{12}\phi(t) - \frac{48}{12}\phi(t - \Delta t) + \frac{36}{12}\phi(t - 2\Delta t) - \frac{16}{12}\phi(t - 3\Delta t) + \frac{3}{12}\phi(t - 4\Delta t) \quad (2-38)$$

考虑到桨叶表面的偶极子强度和扰动速度势互成相反数，可以得到

$$\frac{\partial \phi_{i,t}}{\partial \mu_{B,i}} = -\frac{25}{12\Delta t} \quad (2-39)$$

$$\frac{\partial \phi_{i,t}}{\partial \mu_{B,l}} = 0 \quad \text{当 } i \neq l \text{ 时.} \quad (2-40)$$

式中， $\phi_{i,t}$ 是编号为 i 的桨叶表面面元上的扰动速度势的时间导数。

(3) 导数 $\frac{\partial \mathbf{u}_{tot}^2}{\partial u_{ind,t,m}}$ 的推导

对式 (2-16) 两边同时取平方可以得到

$$\mathbf{u}_{tot}^2 = \sum_{m=1}^3 (u_{ind,t,m} + u_{\infty,t,m})^2. \quad (2-41)$$

考虑到式中的六个速度分量 $u_{ind,t,m}$ 和 $u_{\infty,t,m}$ 相互独立，可以得到：

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{tot}^2}{\partial u_{ind,t,m}} = 2(u_{ind,t,m} + u_{\infty,t,m}) = 2u_{tot,m}. \quad (2-42)$$

每次计算桨叶表面压强时，总速度 \mathbf{u}_{tot} 都会被计算。所以，导数项 $\frac{\partial \mathbf{u}_{tot}^2}{\partial u_{ind,t,m}}$ 的计算并不需要额外的计算时间。

(4) 导数 $\frac{\partial u_{ind,t,m}}{\partial \mu_{B,l}}$ 的推导

导数项 $\frac{\partial u_{ind,t,m}}{\partial \mu_{B,l}}$ 依赖于桨叶表面速度势梯度的计算方法，这里以2.1节中介绍的方法为例进行推导。

由式 (2-17)、(2-18) 和 (2-19) 可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ind,t,m}}{\partial \mu_{B,l}} &= \left(\frac{\partial u_{ind,t,m}}{\partial \phi_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \phi_{s1}} + \frac{\partial u_{ind,t,m}}{\partial \phi_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \phi_{s1}} \right) \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial \phi_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial \mu_{B,l}} \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_{ind,t,m}}{\partial \phi_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \phi_{s2}} + \frac{\partial u_{ind,t,m}}{\partial \phi_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \phi_{s2}} \right) \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial \phi_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial \mu_{B,l}} \\ &= - \left(e_{x,m} - e_{y,m} \frac{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{s1}}{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{s1}} \right) \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial \phi_l} - \left(\frac{e_{y,m}}{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{s1}} \right) \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial \phi_l} \end{aligned} \quad (2-43)$$

式中 ϕ_l 表示编号为 l 的面元上的扰动速度势。导数项 $\frac{\partial \phi_{s1}}{\partial \phi_l}$ 和 $\frac{\partial \phi_{s2}}{\partial \phi_l}$ 可以由采用的数值微分方法得到，结果依赖于面元间的相互位置。

至此，式 (2-32) 中的每一项都已确定，雅可比矩阵可以通过上述的结果进行计算。

2.2.3 更新桨叶表面偶极子强度的偶极子增量法

本部分介绍一种在压力库塔条件迭代过程中，由新的尾涡面偶极子强度 $\boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k+1)}$ 确定桨叶表面偶极子强度 $\boldsymbol{\mu}_B^{(k+1)}$ 的新方法，称为偶极子增量法 (Dipole Increment Method)。该方法可避免在每一步更新 $\boldsymbol{\mu}_B$ 时对方程组 (2-26) 的求解。

在两个连续的迭代步中，式 (2-33) 可表示为：

$$\boldsymbol{\mu}_B^{(k)} = -A^{-1} C_{wake} \boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k)} + C_B^{-1} \mathbf{R}_1 \quad (2-44)$$

和

$$\boldsymbol{\mu}_B^{(k+1)} = -A^{-1}C_{wake}\boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k+1)} + C_B^{-1}\mathbf{R}_1. \quad (2-45)$$

将以上两式相减，可以得到：

$$\boldsymbol{\mu}_B^{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}_B^{(k)} = -A^{-1}C_{wake}(\boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k)}). \quad (2-46)$$

定义尾涡面元上的偶极子强度增量为：

$$\Delta\boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k)} = \boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k+1)} - \boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k)}, \quad (2-47)$$

可以将式(2-46)改写为：

$$\boldsymbol{\mu}_B^{(k+1)} = \boldsymbol{\mu}_B^{(k)} + J^\mu \Delta\boldsymbol{\mu}_{wake}^{(k)} \quad (2-48)$$

式中 J^μ 的定义参见式(2-34)，其并不依赖于迭代步数 k 。以上描述的方法即称为偶极子增量法。由于减少了一次方程组的求解，偶极子增量法可以进一步减少实施压力库塔条件所需要的计算时间。

2.2.4 实例分析

本小节首先进行雅可比矩阵的实例计算，验证雅可比矩阵解析求解方法的高效性；然后分别通过螺旋桨敞水分析实例和船后螺旋桨分析实例，验证了快速压力库塔条件实现算法在不同计算情况下的高效性。

2.2.4.1 雅可比矩阵计算实例

本节以P4119螺旋桨在设计点处 ($J = 0.833$) 的工况为例，分析传统差商近似法和解析方法在计算雅可比矩阵时的精度和效率。P4119螺旋桨是美国大卫船模水池设计的一款无侧斜三叶模型桨，文献[123]中给出了其几何描述和实验测试结果。

在桨叶的弦向和径向分别布置60和25个面元，考虑两圈尾涡，旋转步长角度设定为 6° 。此外，桨叶表面网格进行正交化处理，以减少梢部面元的扭曲，提高计算精度[51, 124]。桨叶和尾涡面上的面元分布如图2-3所示，网格无关性研究将在2.4节给出。

在计算开始时，根据未受扰动的相对来流速度对尾涡面的位置进行初始化。基于初始尾涡面位置和由线性库塔条件得到的偶极子强度初始值，分别使用传统差商近似法和解析方法对雅可比矩阵进行计算。所得雅可比矩阵的相对误差随传统差商近似法中参数 β 的变化如图2-4所示，其中相对误差定义为：

$$E_r = \frac{\|J^\beta - J^0\|_2}{\|J^0\|_2} \quad (2-49)$$

式中， J^β 和 J^0 分别表示差商近似法和解析方法得到的雅可比矩阵。从图中可以看出，当 β 的绝对值减小时，传统差商近似法所得的雅可比矩阵逐渐靠近解析方法所得的结果。可以认为，解析方法所得的矩阵就是在 β 趋于零时，传统方法所得矩阵的极限值。所以，解析方法得到的雅可比矩阵总是比传统差商近似法所得的更加精确。

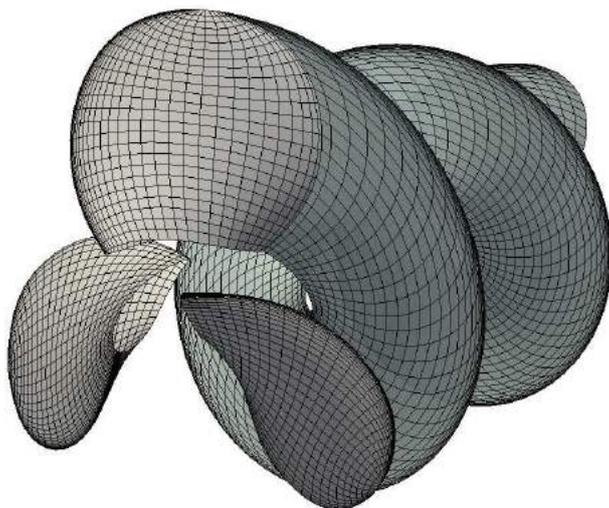


图 2-3 P4119螺旋桨桨叶与尾涡面上的面元

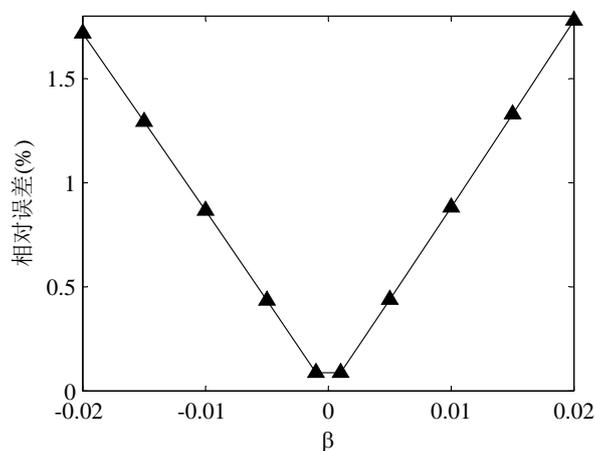


图 2-4 雅可比矩阵之间的相对误差

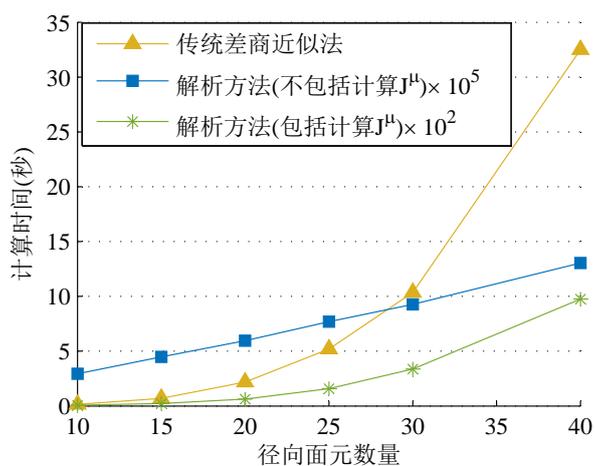


图 2-5 雅可比矩阵计算时间随径向网格数量的变化

图2-5中给出了两种方法计算一次雅可比矩阵所消耗的时间随弦向面元数量的变化。不考虑矩阵 J^μ 的计算时，解析方法消耗的时间要比传统差商近似法低 5 个量级，

包括矩阵 J^μ 的计算时，计算时间低 2 个量级。然而在每个时间步的压力库塔条件迭代中，矩阵 J^μ 是不变的，只需要计算一次，并非在每次雅可比矩阵的计算中都要重新计算。此外，从图中还可看出，随着径向面元数的增加，由于雅可比矩阵元素个数同时增加，两种方法消耗的计算时间都会增加。然而，解析方法计算时间的增加是线性的，传统差商近似法计算时间的增加大约是三次方的。作为结论，本文提出的雅可比矩阵的解析求解方法可使计算时间大幅降低。

2.2.4.2 螺旋桨敞水分析实例

为了描述的简便，使用以下术语：

外部迭代：面元法中的尾涡对齐迭代；

内部迭代：压力库塔条件实现过程中的牛顿迭代；

传统算法A：在每一步的内部迭代中均使用传统差商近似法计算雅可比矩阵的算法；

传统算法B：只在内部迭代的第一步中使用传统差商近似法计算雅可比矩阵的算法，对应于修正的牛顿迭代算法；

传统算法C：只在前三步的外部迭代的第一步内部迭代中使用传统差商近似法计算雅可比矩阵的算法。三步外部迭代以后的雅可比矩阵均使用第三步计算所得的雅可比矩阵来近似；

新算法A：在每一步的内部迭代中均使用解析方法计算雅可比矩阵的算法；

新算法B：以新算法A为基础，并使用偶极子增量法更新桨叶表面偶极子强度的算法。

表2-1中列出了上述各种算法的直观对比。在本文中，当随边处最大压力差小于1Pa时，即认为牛顿迭代完成了收敛。

表 2-1 压力库塔条件实现过程中各种算法的对比

算法名称	雅可比矩阵计算方法	内部迭代中雅可比矩阵计算时机	外部迭代中雅可比矩阵计算时机	是否使用偶极子增量法
传统算法A	传统差商近似法	每步	每步	否
传统算法B	传统差商近似法	第一步	每步	否
传统算法C	传统差商近似法	第一步	前三步	否
新算法A	本文解析法	每步	每步	否
新算法B	本文解析法	每步	每步	是

(1) 设计点工况

本处仍以 P4119 螺旋桨为例，分析对比表2-1中所列的各种算法。面元分布和具体设置同2.2.4.1节。

图2-6中给出了第一步外部迭代中不同算法产生的压力差收敛过程。传统算法B中，只在第一个内部迭代步中对雅可比矩阵进行计算，导致其收敛速度慢于其他算法。传

统算法A和新算法A的收敛速度基本一致，说明使用传统差商近似法和解析方法计算雅可比矩阵，对收敛速度的影响并不明显。图2-7中给出了每个内部迭代步所消耗的计算时间。由于传统的雅可比矩阵计算方法效率低下，传统算法A的每一步和传统算法B的第一步都特别耗时（大于5秒）。相比之下，新算法需要的计算时间要少的多。新算法A中每一个迭代步大约需要0.21秒的时间，而新算法B中每一步需要的时间小于0.001秒（第一步除外，第一步中需计算 J^{μ} ）。因此，可以得出以下结论：新算法要比传统算法更加高效，且新算法B是四种算法中最高效的算法。

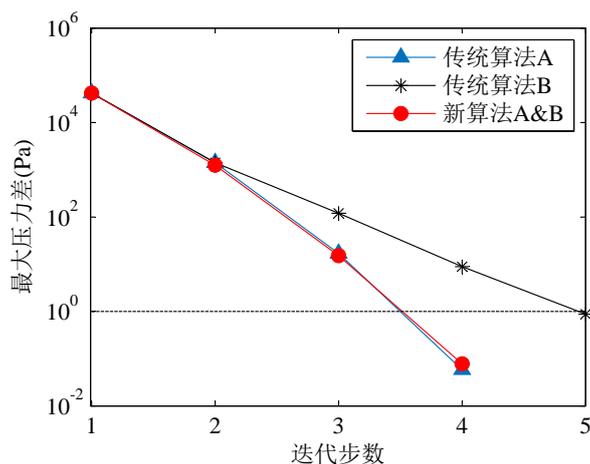


图 2-6 第一步外部迭代中不同算法产生的压力差收敛过程

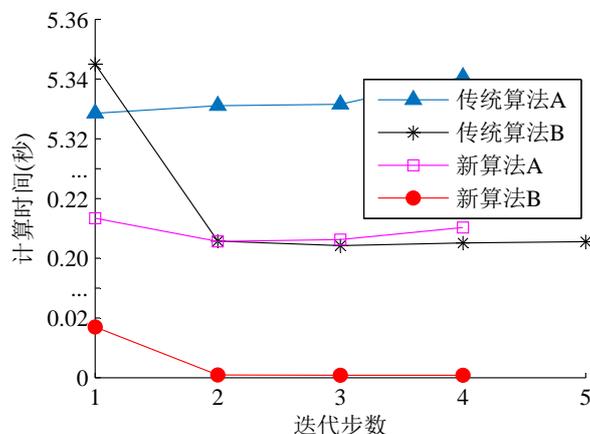


图 2-7 不同算法的内部迭代步消耗的计算时间

整个计算过程中，每个外部迭代步中的内部迭代步数和平均内部迭代步时间分别如图 2-8 和 2-9 所示。可以看出，传统算法A和新算法A、B总是需要相同的内部迭代步数，且总是小于传统算法B、C所需要的内部迭代步数。然而，传统算法A的平均内部迭代步时间要远大于别的算法。新算法B的平均内部迭代步时间是最短的。综合以上两方面，新算法B是所有算法中表现最佳的算法。

不同算法的总计算时间如图 2-10 所示。正如预期，新算法B需要最少的计算时间，甚至在图中都难以辨认压力库塔条件导致的附加计算时间。使用新算法B实现的压力库

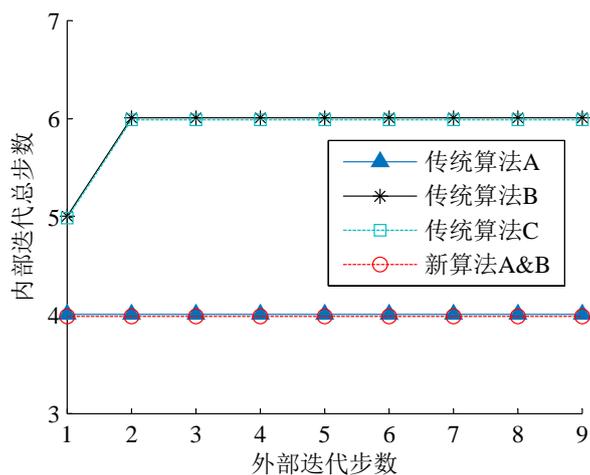


图 2-8 每个外部迭代步中不同算法所需的内部迭代步数

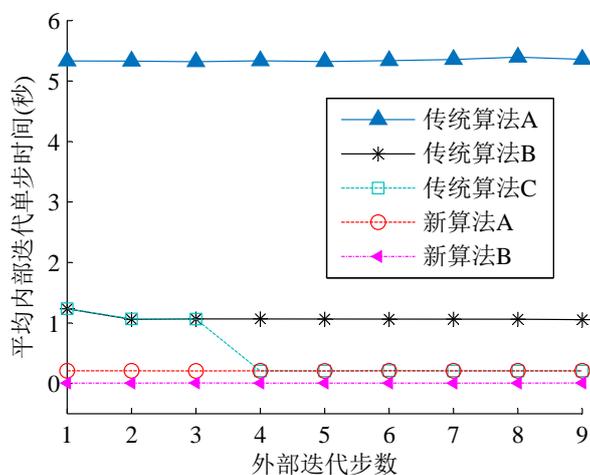


图 2-9 每个外部迭代步中不同算法所需的平均内部迭代步时间

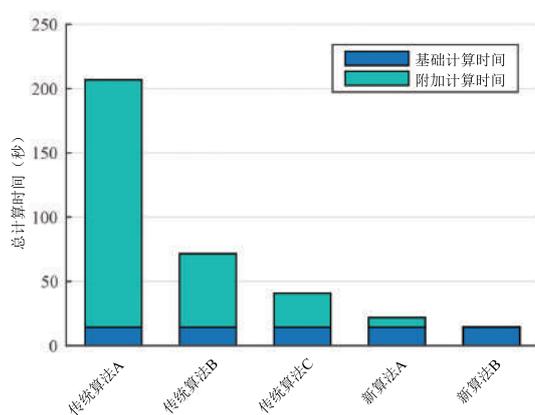


图 2-10 P4119螺旋桨设计点工况下的敞水分析所用总计算时间（附加时间为压力库塔条件所消耗的计算时间，基础时间为面元法中其他计算所消耗的时间）

塔条件面元法计算，只比线性库塔条件面元法计算多使用1.3%的计算时间，与流行的传统算法B相比，节约了大约80%的计算时间。

根据以上分析，传统算法A在收敛速度方面和新算法A、B基本一致，然而需要更多的计算时间。所以，后面的分析中不再考虑传统算法A和新算法的比较。

(2) 低进速比重载工况

本处以KP505螺旋桨为例。KP505螺旋桨是为集装箱船KCS设计的一款5叶中侧斜螺旋桨，其侧斜角为 32° ，设计点为 $J = 0.7$ ，其他基本参数见[125]。本小节使用不同算法对两个重载工况下（ $J=0.4$ 和 0.3 ）的KP505螺旋桨进行了分析。桨叶弦向和径向面元数量分别为60和25，两周尾涡被模拟，旋转角度增量为 6° 。叶片上的面元布置如图2-11所示。

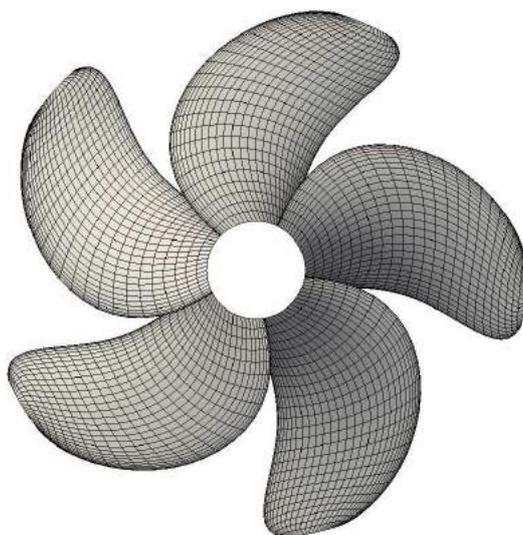


图 2-11 KP505螺旋桨桨叶表面面元

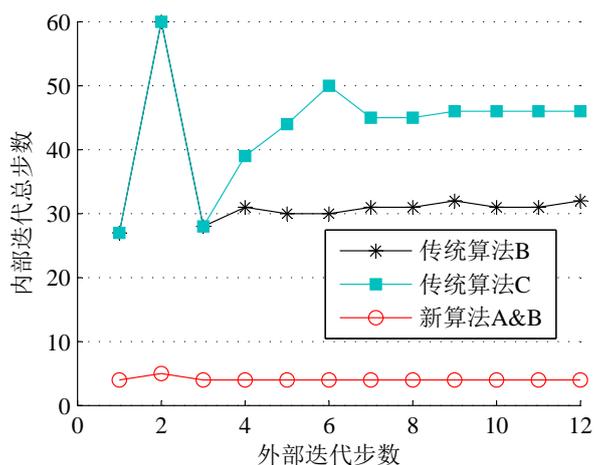


图 2-12 KP505螺旋桨 $J = 0.4$ 工况下，每个外部迭代步中不同算法所需的内部迭代步数

在 $J = 0.4$ 工况下，不同算法所需内部迭代步数变化如图2-12所示。可以看出，在重载情况下，传统算法B和传统算法C需要更多的内部迭代步数来达到收敛。这导致总的计算时间大幅上升，如图2-13所示。同时可以观察到，即使在该重载工况下，新算法

仍能在4步之内收敛，新算法B对应的压力库塔条件附加计算时间仅仅为基础计算时间的2%。

为了得到传统算法收敛速度慢的原因，将传统算法B中使用的雅可比矩阵与由解析方法所得的精确雅可比矩阵进行对比。第三步外部迭代中每一步内部迭代中的雅可比矩阵相对误差如图2-14所示。第一步过后，相对误差增长到40%以上。作为对比，若使用传统算法A，雅可比矩阵的相对误差一直保持在1.5%以内，如图2-15所示。这导致传统算法A只需4步便能收敛，而传统算法B却需要31步。作为结论，在重载工况下，不同内部迭代步间的雅可比矩阵变化是不能忽略的，使用第一步所得结果来近似其他步中的雅可比矩阵会降低压力库塔条件的收敛速度。

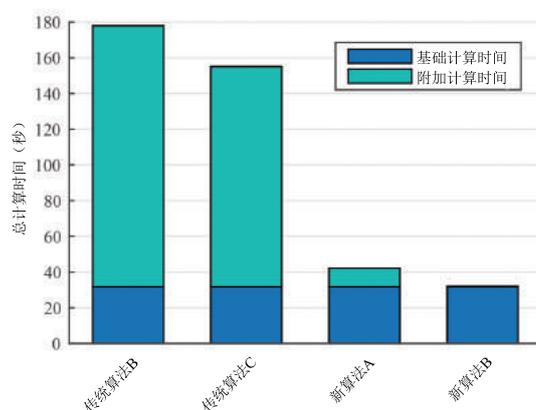


图 2-13 KP505螺旋桨 $J = 0.4$ 工况下的敞水分析所用总计算时间（附加时间为压力库塔条件所消耗的计算时间，基础时间为面元法中其他计算所消耗的时间）

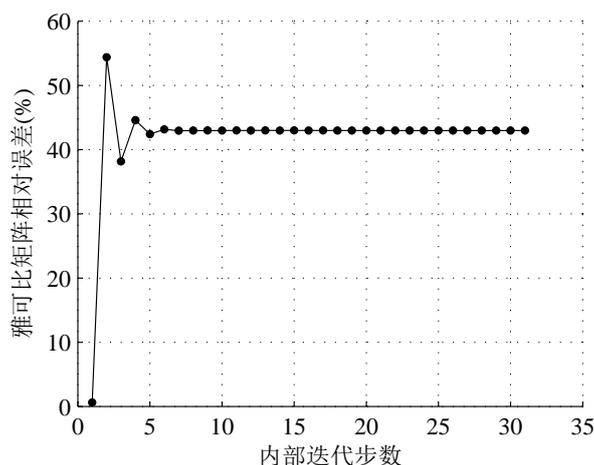


图 2-14 使用传统算法B时，第三步外部迭代中的雅可比矩阵相对误差变化

对于 $J = 0.3$ 工况下的模拟，传统算法B并不能够达到收敛，而新算法始终在4步之内达到收敛。图2-16给出了使用传统算法B时，第一外部迭代步中最大压力差和雅可比矩阵相对误差的变化。图2-17则给出了使用传统算法A时上述变量的变化。可以看出，使用传统算法B时，内部迭代过程在第三步开始发散，原因是雅可比矩阵的相对误差达

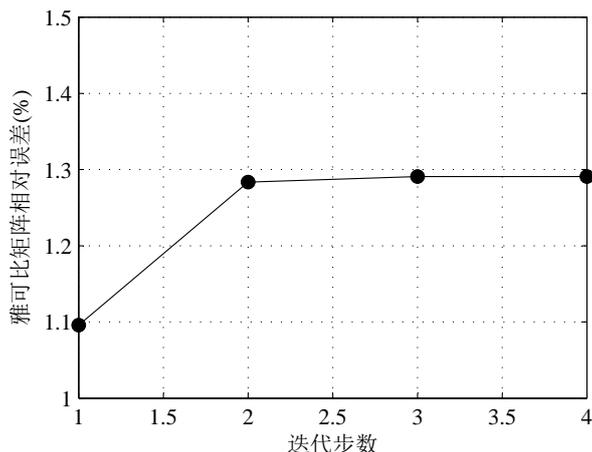
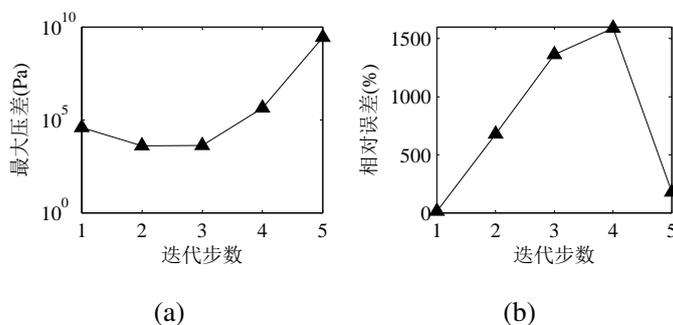
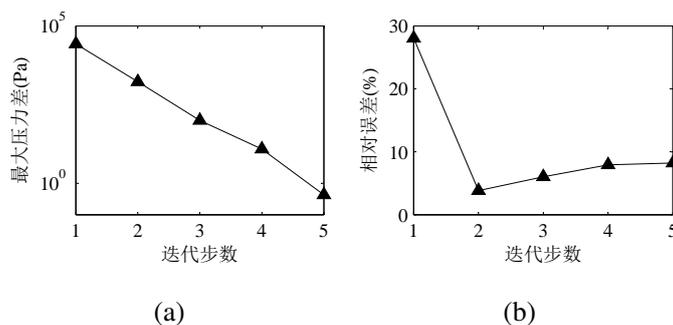


图 2-15 使用传统算法A时，第三步外部迭代中的雅可比矩阵相对误差变化

到500%以上，此种情况下的雅可比矩阵很可能给出错误的甚至相反的变量变化方向。

图 2-16 KP505螺旋桨 $J = 0.3$ 工况下，使用传统算法B时的第一步外部迭代中：(a) 最大压力差变化，(b) 雅可比矩阵相对误差变化图 2-17 KP505螺旋桨 $J = 0.3$ 工况下，使用传统算法A时的第一步外部迭代中：(a) 最大压力差变化，(b) 雅可比矩阵相对误差变化

2.2.4.3 船后螺旋桨分析实例

本部分使用不同算法对工作于船后伴流场的KP505螺旋桨进行非定常分析，工况选为 $J = 0.7$ 。桨叶上弦向和径向的面元数量分别为40和15，两周尾涡被模拟，旋转角度增量为 6° 。桨叶上的面元布置如图2-18所示，实效伴流场分布如图2-19所示。

首先，采用同时模拟所有叶片的全通道模拟方法。因为面元数量多，求解一次桨叶表面面元偶极子强度更加耗时，使用传统差商近似法计算一次雅可比矩阵需要100多

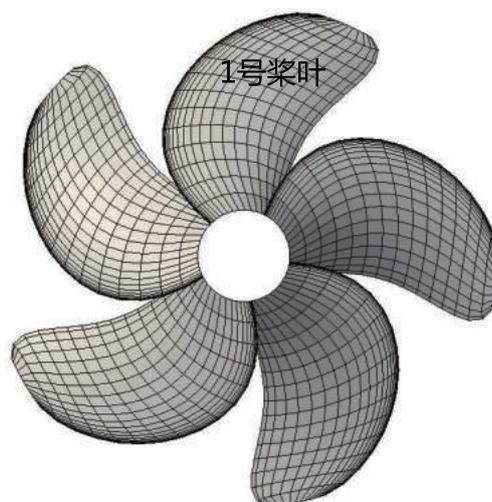


图 2-18 船后KP505螺旋桨分析中的桨叶表面面元

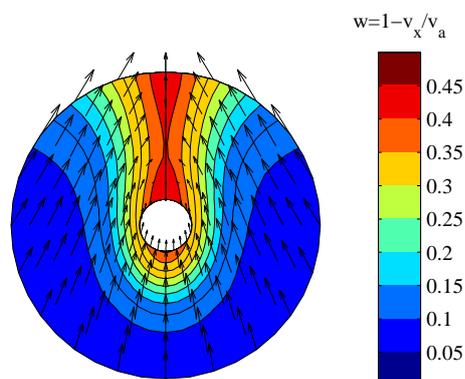


图 2-19 船后螺旋桨分析的实效伴流场

秒，而使用线性库塔条件时每个外部迭代步只需7秒左右的时间。所以，在该情况下使用传统差商近似法是不切实际的。使用本章提出的解析方法，计算一次雅可比矩阵耗时小于0.01秒，使得在非稳态分析中使用压力库塔条件的时间代价可以忽略。分别使用新算法B和线性库塔条件方法进行船后KP505螺旋桨的非定常分析，计算显示，内部迭代总能在4步之内收敛，使用新算法B时的总计算时间只比使用线性库塔条件的总计算时间多0.1%左右。图2-20给出了计算所得的某单个叶片（图2-18所示的一号桨叶）的推力系数变化。两种方法所得结果的峰值误差在5%左右。图2-20中可以观察到，在峰值之后，推力系数总有一次波动，其对应于桨叶随边经过 0° 附近的减速尾流区域的时刻。波动是由轴向速度以及尾涡面位置的突变引起的。

除此之外，采用关键桨叶技术（或单通道模拟方法）对船后KP505螺旋桨进行非定常分析，即在模拟中只求解某单一桨叶上的未知量，认为其他桨叶表面的偶极子强度与该桨叶处于相同位置时的值相同。关键桨叶技术降低了方程组的尺度，使得使

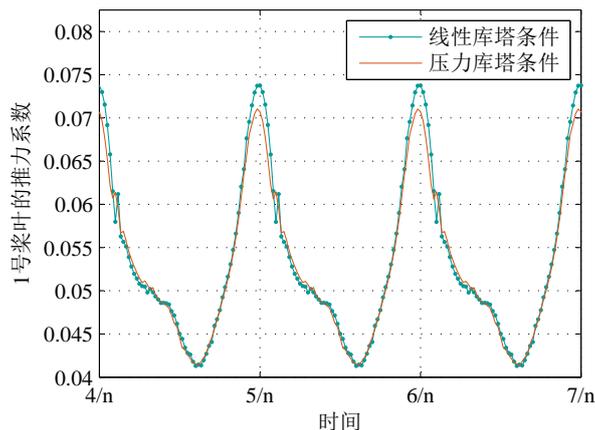


图 2-20 单一桨叶上的推力系数变化

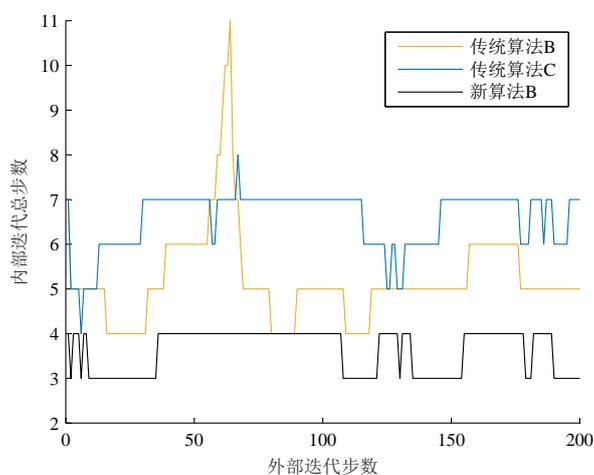


图 2-21 船后螺旋桨分析中的内部迭代步数变化

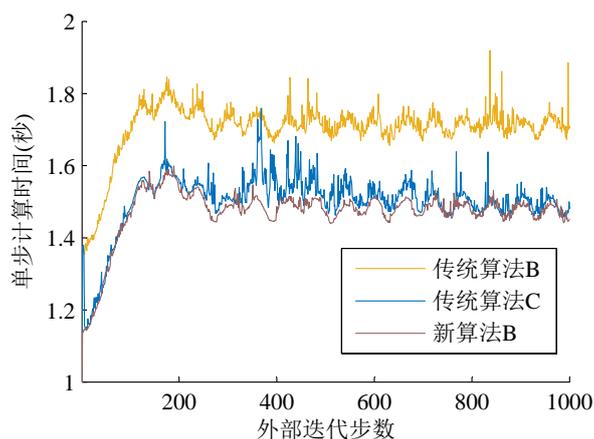


图 2-22 船后螺旋桨分析中的外部迭代步所消耗时间

用传统差商近似法计算雅可比矩阵的时间可以被接受。分别使用传统算法B、C和新算法B进行基于压力库塔条件的非定常分析，为了节约计算时间，本算例中的传统算法B、C中使用了偶极子增量法。图2-21中给出了每个时间步所需的内部迭代步数。新算法B总是需要更少的步数就能达到收敛。图2-22中给出了每个时间步所消耗的计算时

间。传统算法C和新算法B所需的时间都明显小于传统算法B所需时间，而传统算法C和新算法B所需时间之间的差距非常小。本算例中，新算法B所导致的附加计算时间仅为基础时间的0.1%。

基于上述分析，可以得出以下结论：结合了雅可比矩阵解析求解方法和偶极子增量法的新算法B，收敛速度最快，所需计算时间最少。

2.3 自适应可变速速度光滑参数模型

如2.1节所述，在进行尾涡对齐时，需要使用到尾涡面元节点上的流场速度，其中包括尾涡面元自身诱导产生的速度。

而低阶偶极子面元的诱导速度，等价于面元边界所表示的涡线段的诱导速度[126, 118]，而涡线段的诱导速度具有奇异性，使得直接计算所得的流场速度存在不连续性，这将导致不稳定的尾涡对齐过程和混乱无规律的尾涡面形状。使用速度光滑模型（或去奇异模型）对涡线段的诱导速度进行去奇异化，可使得所得速度场光滑连续。

依据比奥-萨伐尔定律，一段强度为 Γ 的三维涡线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在场点（collocation point） P_{col} 处的诱导速度为

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|^2} \mathbf{R}_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|} - \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|} \right) \quad (2-50)$$

式中 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_{col} - \mathbf{P}_1$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{P}_{col} - \mathbf{P}_2$ 。对式（2-50）进行去奇异化，得到以下的速度光滑模型：

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|^2} \mathbf{R}_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|} - \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|} \right) (1 - e^{-\frac{r^2}{\delta^2}}) \quad (2-51)$$

式中 r 是场点与涡线段间的距离， δ 为速度光滑参数。图2-23给出了强度和长度均为1的涡线段，在使用不同速度光滑参数时所诱导产生的速度场。速度光滑模型避免了涡线段附近的诱导速度趋于无穷大，越大的速度光滑参数影响的范围越广，产生的速度场越光滑。

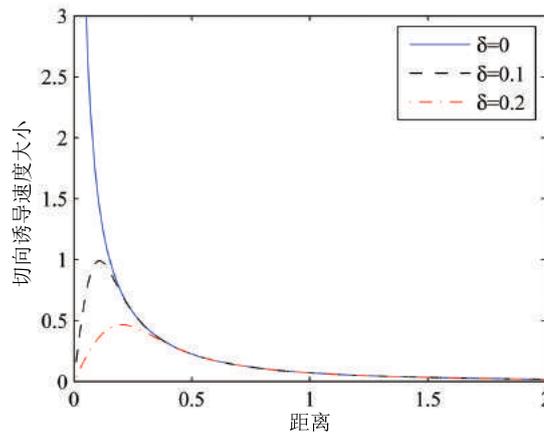


图 2-23 涡线段在其中垂面上诱导产生的速度分布（ $\delta = 0$ 表示未使用速度光滑模型）

为了研究速度光滑模型对整个速度场的影响，假设二维平面中存在一段椭圆涡分布，并使用五个具有单位长度的低阶二维面元对其进行离散，如图2-24所示。在面元上方距离面元0.1的一条直线上计算诱导产生的速度场，直线位置和计算所得的速度分布如图2-25所示。可以看出，所得速度场具有很强的波动性。在螺旋桨的梢涡区域，尾涡面元彼此接近的情况经常发生，速度场的波动将使得尾涡对齐过程不稳定。采用速度光滑模型后，所得速度场分布如图2-26所示，图中同时给出了速度场分布的精确解。可以看出，具有合适光滑参数的速度光滑模型消除了速度场的波动性，但同时也低估了诱导速度的大小。当速度光滑参数过小时，速度场的波动并不能有效的被抑制；当速度光滑参数过大时，诱导速度的大小将进一步被低估。

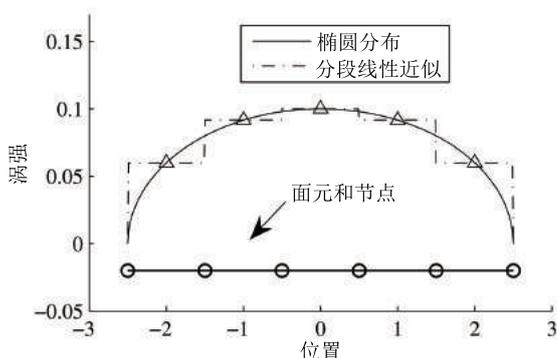


图 2-24 二维平面上的椭圆涡分布以及相应的低阶面元近似

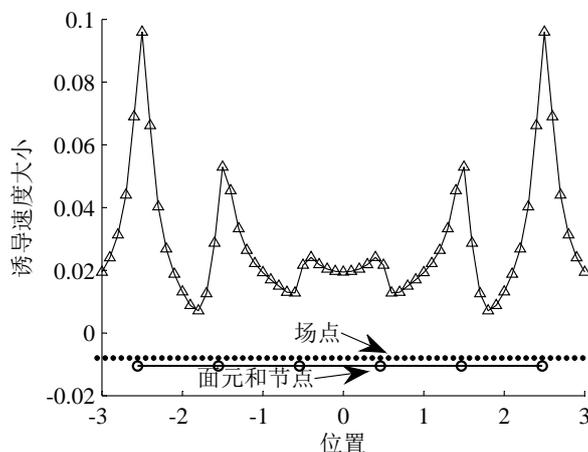


图 2-25 面元和场点的相对位置，以及直接计算得到的场点处的速度大小

在传统的螺旋桨尾涡对齐及流场分析中，速度光滑参数是一个常数，且一般根据尝试性的数值试验来确定。使用不同的速度光滑参数，对工作于设计点处的KP505螺旋桨进行定常的敞水分析，计算中相邻两步的尾涡面元节点位置变化小于螺旋桨直径的1%时，认为计算达到收敛。计算所得结果见表2-2。小的 δ 值导致了较慢的收敛速度和较大的推力系数 K_T 和扭矩系数 K_Q 。当 δ/D 大于0.06时，收敛速度不再随 δ 变化，而计算所得的推力和扭矩仍随 δ 的增大而减小。因此，在螺旋桨的流场分析和水动力计算中，

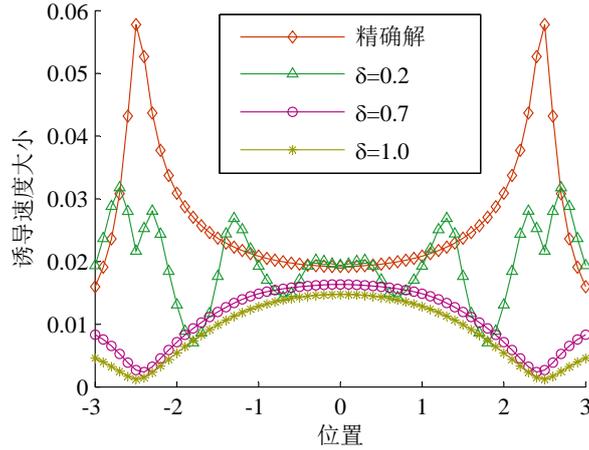


图 2-26 使用不同速度光滑参数得到的速度大小分布

表 2-2 使用不同速度光滑参数得到的 KP505 螺旋桨设计点工况下的敞水性能与收敛速度

δ/D	K_T	$10K_Q$	收敛步数
0.03	0.18499	0.32653	48
0.04	0.18494	0.32650	17
0.05	0.18488	0.32642	10
0.06	0.18482	0.32635	7
0.07	0.18474	0.32626	7
0.08	0.18466	0.32616	7

随意选取速度光滑参数是不可取的。此外，对于不同的螺旋桨以及不同的工况，最佳的速度光滑参数取值往往是不同的。所以，研究一种自适应确定速度光滑参数的方法是很有必要的。

对于常数值的速度光滑参数还存在另一个问题，即螺旋桨尾涡的不同部分需要不同的 δ 值。在接近桨叶的上游区域，需要较小的 δ 值来预测梢涡卷曲；而在远离桨叶的下游区域，随着面元尺寸的增大，需要较大的 δ 值来消除速度场中的波动性。基于以上观察，本文提出一种可变速度光滑参数模型，并使用自适应的方法确定模型中参数的大小。

2.3.1 可变速度光滑参数模型

由于螺旋桨尾涡的不同部分需要不同的 δ 值，本小节通过将速度光滑参数与尾涡中涡线段的年龄（即其离开桨叶后所经历的时间）建立联系，提出一种可变速度光滑模型。通过量纲分析，速度光滑参数可表示如下

$$\delta = k_\delta D^{1-n_\delta} (v_{tip} t)^{n_\delta} \quad \text{其中 } 0 \leq n_\delta \leq 1 \quad (2-52)$$

式中 v_{tip} 是叶梢的总速度， t 是尾涡中涡线段的年龄， n_δ 和 k_δ 是待定的参数。通过观察速度光滑模型的公式 (2-51) 可以发现，速度光滑参数 δ 和涡核半径具有相似的作用，而理论分析[127]和实验研究[128]都表明涡核半径是和涡年龄的平方根成正比的。据此，

选定 n_δ 为 0.5, 式 (2-52) 简化为

$$\delta = k_\delta \sqrt{Dv_{tip}t}. \quad (2-53)$$

2.3.2 可变速度光滑参数的自适应计算

本小节介绍一种根据螺旋桨工况自适应确定式 (2-53) 中系数 k_δ 的方法。式 (2-53) 中的系数 k_δ 决定了速度光滑参数的大小, 所以 k_δ 值会以与 δ 相似的方式影响收敛速度以及计算所得的尾涡形态和水动力性能。采用不同的 k_δ 值, 对工作于设计点处的 KP505 螺旋桨进行稳态分析, 所得的推力系数和收敛所需迭代步数分别如图 2-27 和图 2-28 所示。在图 2-27 所示的区间内, 推力系数之间的差别较小, 相对误差在 0.4% 以内, 并且可以观察到推力系数是随 k_δ 的增大而线性减小的。从图 2-28 可以观察到, 收敛所需迭代步数随 k_δ 的增大而减少, 并且当 k_δ 大于某一个特定的值以后 (本算例中为 0.05), 迭代步数基本保持恒定, 不再随 k_δ 变化。为表述方便, 称恒定以后的迭代步数为最小迭代步数 (minimum step number, MSN), 并称该步数的两倍和三倍分别为双倍最小步数 (double minimum step number, DMSN) 和三倍最小步数 (treble minimum step number, TMSN)。图 2-28 中对这三种迭代步数进行了表示。

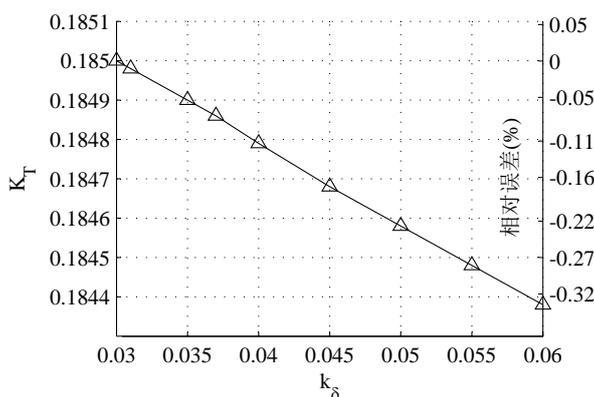


图 2-27 KP505 螺旋桨 $J = 0.7$ 工况下推力系数随参数 k_δ 的变化

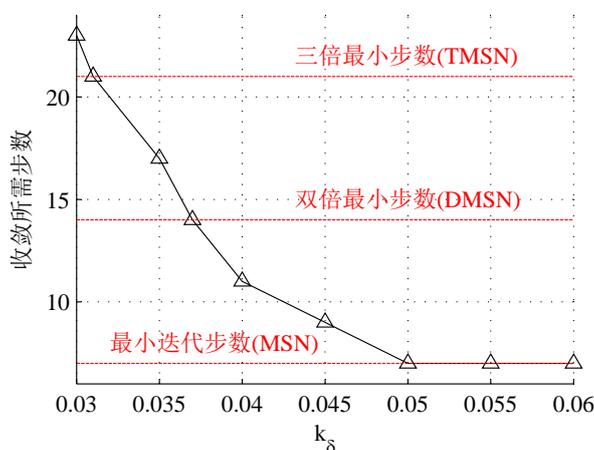


图 2-28 KP505 螺旋桨 $J = 0.7$ 工况下敞水分析收敛所需步数随参数 k_δ 的变化

对应于MSN ($k_\delta = 0.05$), DMSN ($k_\delta = 0.037$) 和TMSN ($k_\delta = 0.05$) 的KP505的尾涡面形态如图2-29所示。从图中可以看出, 对应于DMSN和TMSN的尾涡面之间的差距非常小, 而对应于MSN的尾涡面与上述二者具有明显的差异。因此认为, 能使得收敛步数位于DMSN和TMSN之间的 k_δ 值以可接受的收敛速度得到了收敛的尾涡面形态, 是合适的 k_δ 取值。

通过一些列数值试验, 得到三个不同的螺旋桨(即P4119螺旋桨, KP505螺旋桨和德国波茨坦船模水池的实验桨PPTC螺旋桨[129])工作于不同的进速比时, 分布对应于DMSN和TMSN的 k_δ 值, 所得结果在图2-30中给出。

假设系数 k_δ (或由其决定的速度光滑参数 δ)与叶片上的最大附着涡强度 Γ_{max} (其决定了最大桨叶截面载荷)有关, 由量纲分析可得到以下关系

$$k_\delta = k_k \left(\frac{\Gamma_{max}}{v_{tip} D} \right)^{n_k} \quad (2-54)$$

式中 $\frac{\Gamma_{max}}{v_{tip} D}$ 称为无量纲化的最大附着涡强度, k_k 和 n_k 为待定系数。

使用上述数值试验得到的对应于DMSN和TMSN的 k_δ 值的中间值对式(2-54)进行最小二乘拟合, 得到

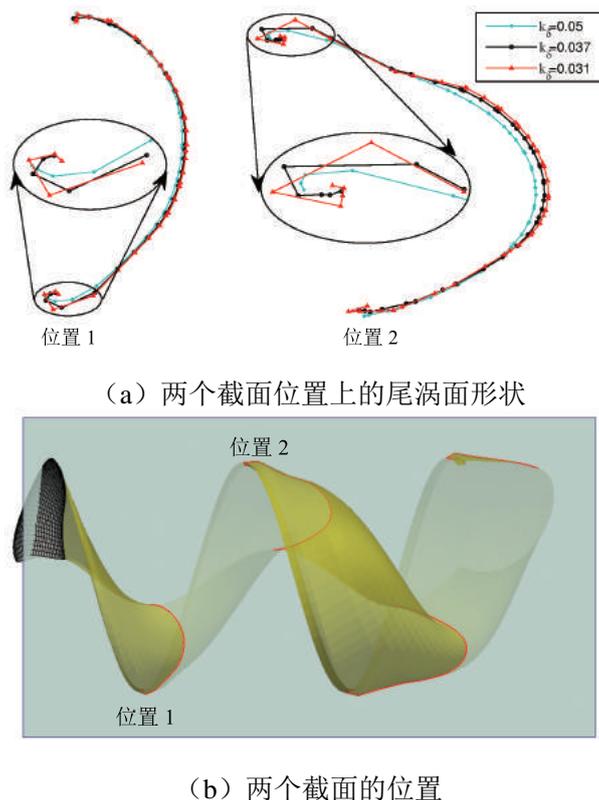
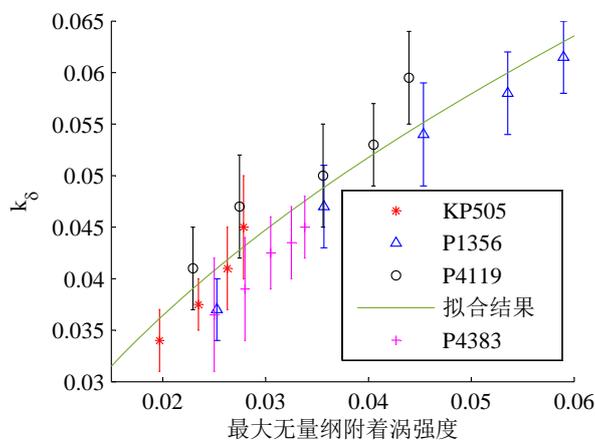
$$k_\delta = 0.2642 \left(\frac{\Gamma_{max}}{v_{tip} D} \right)^{0.5064}. \quad (2-55)$$

图2-30中给出了式(2-55)所描述的曲线, 可以看出几乎对于每一个算例, 式(2-55)都可以给出合理的 k_δ 值。此外, 还使用美国大卫船模水池设计的 72° 大侧斜模型螺旋桨P4383[130]在各工况下的对应于DMSN和TMSN的 k_δ 值来验证式(2-55), 从2-30中可以看出, 式(2-55)计算出的结果都落在了所期望的区间内。所以式(2-55)可作为确定可变速度光滑参数模型中系数 k_δ 的自适应计算公式。

2.3.3 实例分析

以KP505螺旋桨为例, 使用2.2.4.2节中的设置, 分别使用传统常值速度光滑参数模型和可变速度光滑参数模型计算其设计点工况下($J = 0.7$)的尾涡面形态, 得到的结果如图2-31和图2-32所示。作为比较, 图中同时给出了由商业RANS求解器CFX计算得到的尾涡形态。在RANS求解中, 共使用了330万六面体计算网格, 采用了SST $k-\omega$ 湍流模型, 桨叶表面的 y^+ 在1左右。从图中可以看出, 在距离叶片较近的上游区域, 可变速度光滑参数模型所得尾涡面形态更精确, 与RANS求解结果吻合的很好, 而常值速度光滑参数模型由于采用了过大的速度光滑参数, 抑制了梢涡卷曲, 并使得尾涡位置与RANS求解结果出现偏差。在远离叶片的下游区域, 同样是可变速度光滑参数模型得到的尾涡面形态更加合理, 常值速度光滑参数模型中由于采用了过小的速度光滑参数, 导致梢涡处尾涡面形状杂乱无章。

综上, 可以得出以下结论: 可变速度光滑参数模型得到的尾涡面形态在整个流场区域内都要比常值速度光滑参数模型所得结果更加合理。

图 2-29 不同的参数 k_δ 值得到的KP505螺旋桨尾涡面形状图 2-30 参数 k_δ 的拟合结果（一条竖线表示一个工况，上下限分别对应于 DMSN 和 TMSN，点表示上下限的均值）

2.4 计算实例

本节应用基于快速压力库塔条件实现算法和自适应速度光滑参数模型的面元法，分别对三个不同的螺旋桨（即PPTC，P4119和P4384螺旋桨）进行了流场分析和水动力性能计算。首先使用三种不同密度的面元分布进行网格无关性验证，然后使用选定的面元分布进行计算分析。

2.4.1 网格无关性研究

表2-3所列的三种网格方案被用来进行网格无关性研究，计算中模拟两周的尾涡面，

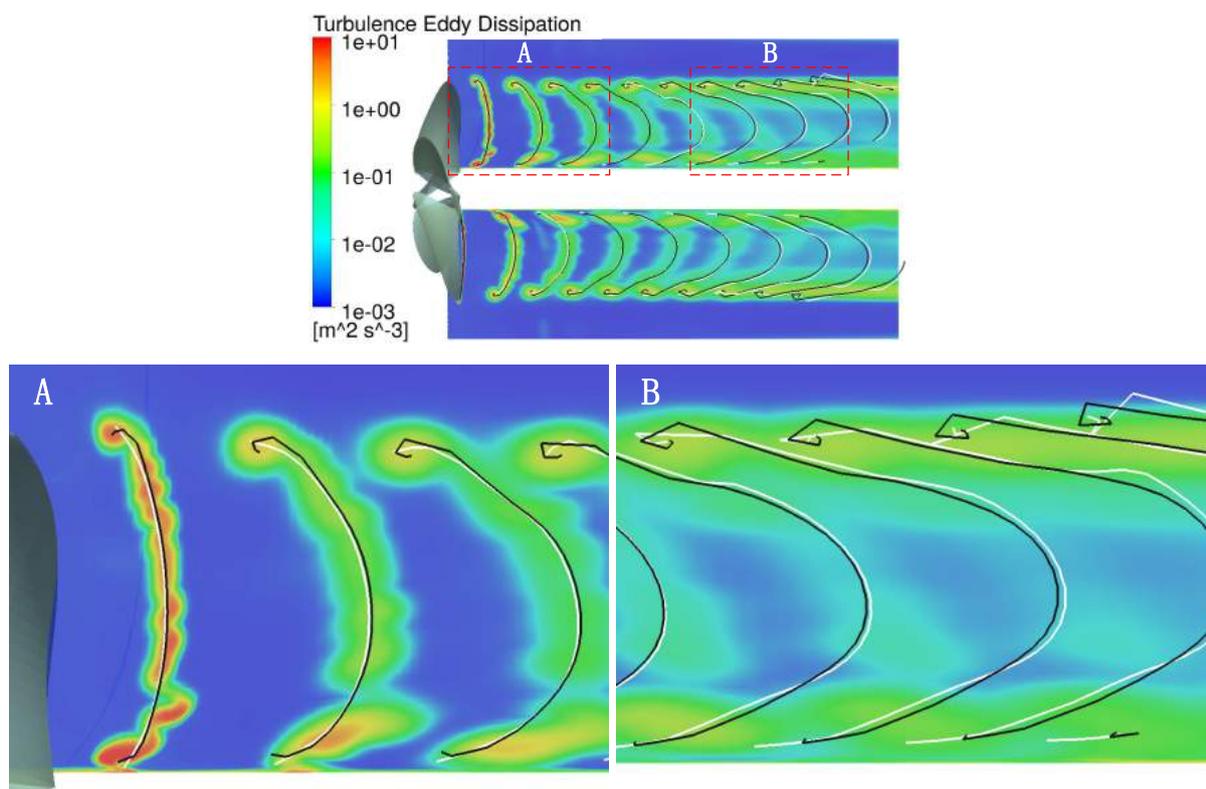


图 2-31 RANS求解器和面元法所得的KP505螺旋桨尾涡形态。面元法尾涡形态由尾涡面和竖直截面的交线表示，白线表示常值速度光滑参数模型的结果 ($\delta = 0.04D$)，黑线表示可变速度光滑参数模型的结果 ($\delta = 0.036\sqrt{Dv_{tip}t}$)。

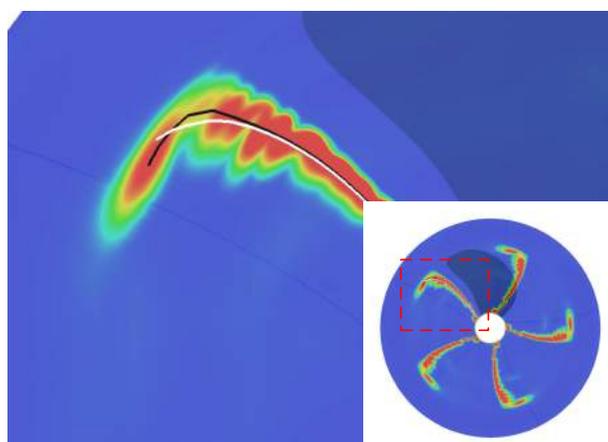


图 2-32 RANS求解器和面元法所得的KP505螺旋桨盘面后方0.12D处横截面上的尾涡形态。面元法尾涡形态由尾涡面和横截面的交线表示，白线表示常值速度光滑参数模型的结果 ($\delta = 0.04D$)，黑线表示可变速度光滑参数模型的结果 ($\delta = 0.036\sqrt{Dv_{tip}t}$)。

桨叶表面网格分布规律弦向取余弦分布，径向取多项式分布，即

$$s_i = \frac{c}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi i}{N_{chord}} \right) \right)$$

$$i = 0, \dots, N_{chord}/2 \quad (2-56)$$

和

$$\begin{aligned}
 r_j &= f\left(\frac{j}{N_R}\right)(R - r_{hub}) + r_{hub} \\
 f\left(\frac{j}{N_R}\right) &= -0.9563\left(\frac{j}{N_R}\right)^3 + 1.3790\left(\frac{j}{N_R}\right)^2 + 0.5773\frac{j}{N_R} \\
 j &= 0, \dots, N_R
 \end{aligned} \tag{2-57}$$

式中 s_i 为弦长为 c 的截面上面元节点的弦向坐标， r_j 为第 j 个截面的半径， f 为多项式核函数， R 和 r_{hub} 分别为螺旋桨半径和轮毂半径， N_{chord} 和 N_R 分别为弦向和径向的面元数量。此外，还使用求解椭圆偏微分方程的方法对桨叶表面网格进行了正交化处理。

使用不同的面元密度，对三个螺旋桨进行计算，所得结果见表2-4。可以看出，网格2和网格3产生的结果相差已经很小（PPTC螺旋桨2%以内，其他桨1%以内），综合考虑计算速度和计算精度，使用网格2的密度进行计算，对应的螺旋桨表面面元分布分别如图2-3和2-33所示。

表 2-3 网格无关性研究中的网格方案

	径向面元数	弦向面元数	旋转一周尾涡面元数量
网格1	15	40	40
网格2	25	60	60
网格3	35	80	90

表 2-4 不同网格密度的计算结果

	PPTC ($J = 1.3$)			P4119 ($J = 0.833$)			P4384 ($J = 0.889$)		
	K_T	K_Q	η	K_T	K_Q	η	K_T	K_Q	η
网格1	0.2713	0.07989	70.28%	0.1434	0.02776	68.49%	0.1835	0.03876	66.98%
网格2	0.2611	0.07697	70.19%	0.1422	0.02770	68.06%	0.1895	0.03952	67.86%
网格3	0.2570	0.07576	70.20%	0.1421	0.02773	67.92%	0.1913	0.03984	67.92%

2.4.2 PPTC 螺旋桨计算实例

根据确定的面元分布，使用所得面元法程序对PPTC螺旋桨进行计算，所得水动力性能与实验的对比如图2-34所示。从图中可以看出，计算所得的效率与实验吻合的很好，轻载情况下（ $J > 1.0$ ）预测得到的推力和实验相比误差很小；而扭矩和重载情况下的推力与实验数据差距较为明显。

扭矩的预测误差主要是由于梢部流场模拟不够精确引起的。PPTC螺旋桨是德国波茨坦水池为了研究梢涡和梢涡空化而专门设计的螺旋桨，其梢涡负载较一般螺旋桨更大，而螺旋桨的梢涡流场经常伴随有复杂的粘性流动，基于势流的面元法难以对其精确模拟。由于力臂较大，梢涡压力分布误差对扭矩具有较大的影响，所以使用面元法

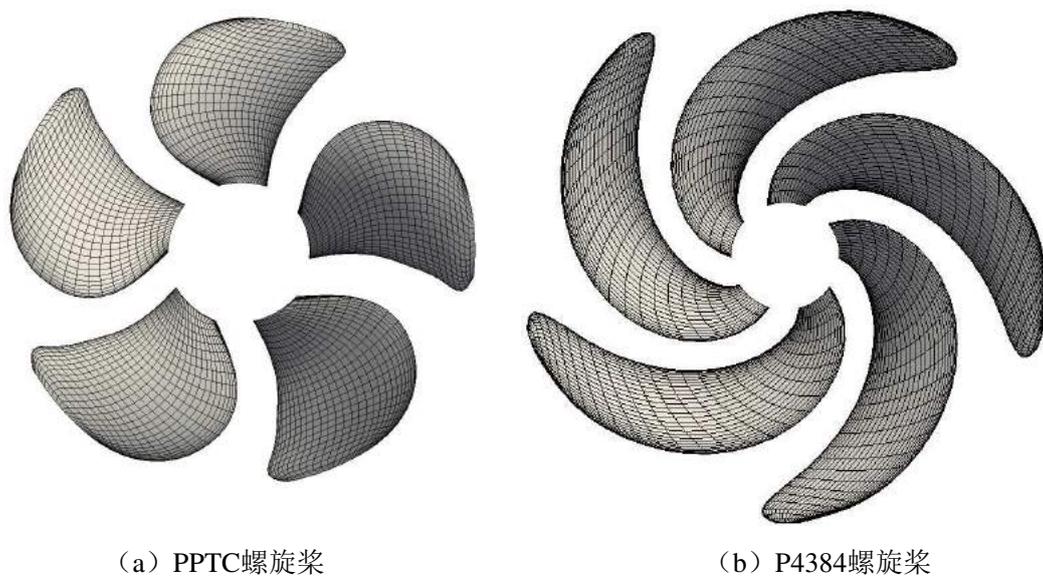


图 2-33 螺旋桨表面面元

预测的PPTC螺旋桨的扭矩会与实验具有明显差异。

重载情况下（即进速比 J 较小时），预测所得推力与实验具有较大差异的原因主要是尾涡模拟不够精确。当进速比较小时，桨叶产生的粘性尾涡与桨叶更加接近，相互影响更加明显，面元法中采用的无厚度无耗散的尾涡近似模型所产生的误差就会更加显著，所以导致得到的水动力性能与实验相比发生了偏差。

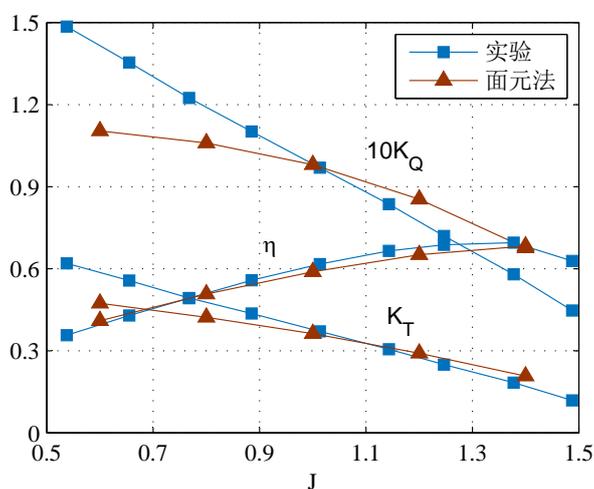


图 2-34 面元法所得PPTC螺旋桨的敞水性能与实验结果的对比

2.4.3 P4119 螺旋桨计算实例

图2-35中给出了对P4119螺旋桨进行数值计算所得的水动力性能与实验数据的对比。从图中可以看出，对于常规的螺旋桨，在设计点处和轻载情况下，计算所得的推力和扭矩与实验数据吻合的都很好。而在重载情况下，仍有较明显的误差，其原因在有关PPTC螺旋桨的结果分析中已有论述，即尾涡模拟与实际不符。

图2-36中给出了面元法得到的 P4119 螺旋桨在设计点处的表面压力分布与实验结果的对比，图中的压力系数由所在半径截面处的当地速度进行无量纲化。从图中可以看出，在各个截面处，面元法所得的压力分布都与实验测试吻合的很好。

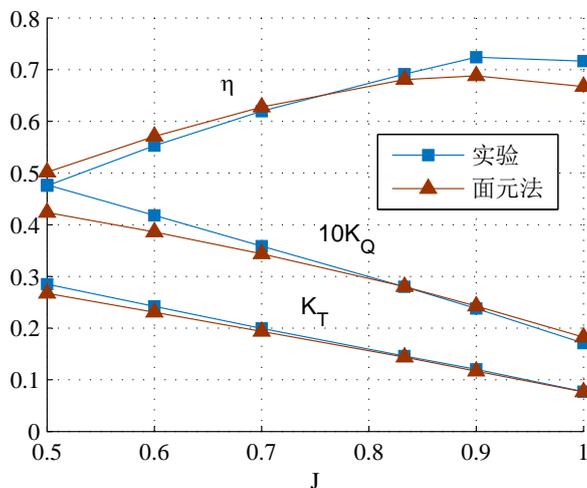
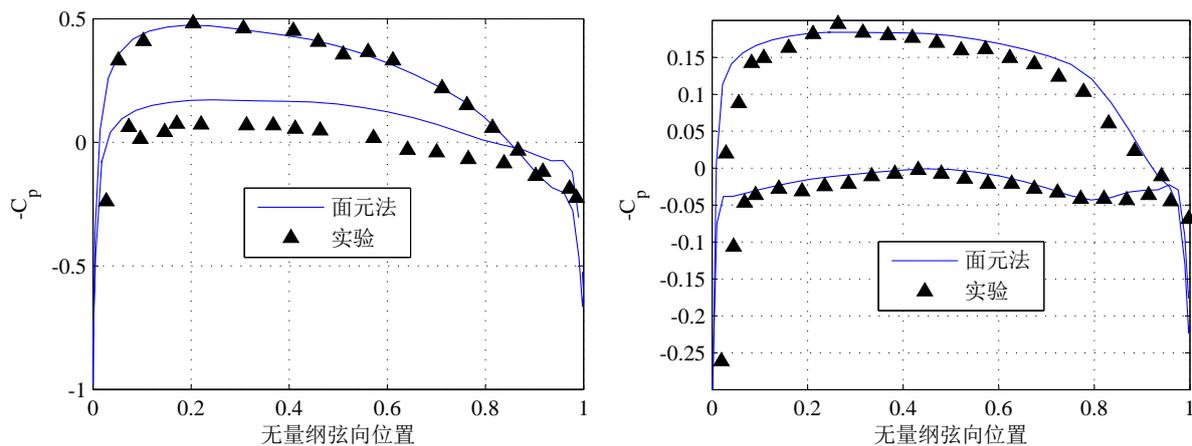
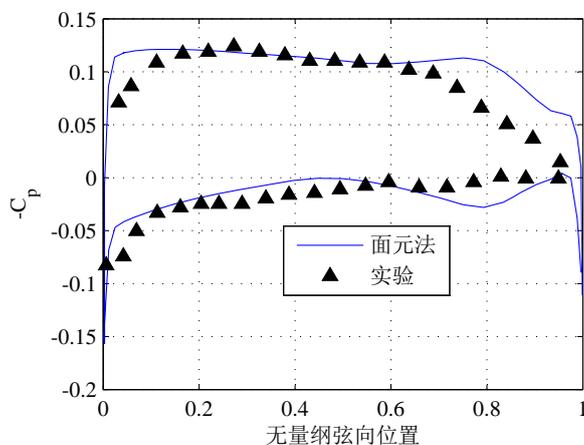


图 2-35 面元法所得P4119螺旋桨的敞水性能与实验结果的对比



(a) $0.3R$ 截面处

(b) $0.7R$ 截面处



(c) $0.9R$ 截面处

图 2-36 面元法所得的P4119螺旋桨桨叶表面压力分布与实验对比

2.4.4 P4384 螺旋桨计算实例

本小节中，使用所得面元法对具有 108° 侧斜角的五叶大侧斜模型螺旋桨 P4384 进行了计算。P4384 螺旋桨是美国大卫水池为了研究侧斜对螺旋桨空化性能影响而设计的系列桨中的一个，文献[130]详细描述了其几何和水动力性能实验测试数据。计算所得水动力性能与实验数据的对比如图2-37所示。从图中可以看出，在各种工况下，面元法所得的水动力性能都与实验结果具有明显的差异。其原因是，作为大侧斜螺旋桨，P4384螺旋桨相邻桨叶的导边和随边距离较近，随边处泄出的尾涡和梢涡与临近叶片的距离很小，尾涡模拟的不精确性对叶片上的压力分布会产生很大的影响。在第5章中我们将发现，当采用更加合适的尾涡流场模拟方法后，P4384螺旋桨的水动力性能计算精度将得到显著的提升。

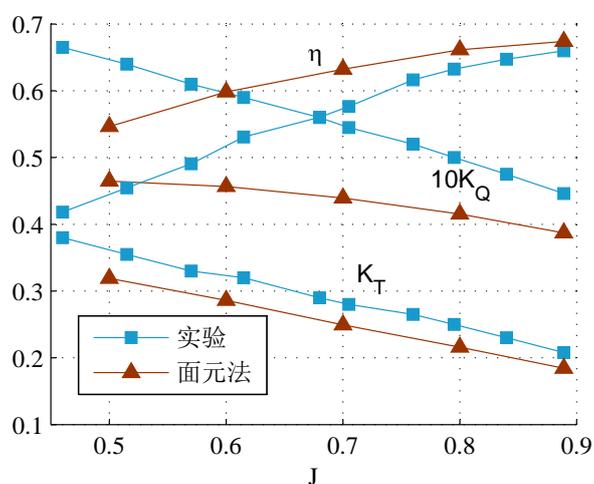


图 2-37 面元法所得P4384螺旋桨的水动力性能与实验结果的对比

2.5 本章小结

本章针对面元法，提出了快速压力库塔条件实现算法和自适应可变速度光滑参数模型。相比于传统方法，快速压力库塔条件实现算法中雅各比矩阵的计算时间降低了5个量级，使得面元法的计算效率得到了大幅提升。自适应可变速度光滑参数模型中使得速度光滑参数的取值在上下游均合适，且建立了速度光滑参数取值和螺旋桨工况之间的关系，提高了面元法预测尾涡面位置的精确性。

本章提出的面元法将被使用在第4章和第5章的面元-涡粒子耦合算法中，所提出的快速压力库塔条件实现算法和可变速度光滑参数模型，因为提高了面元法的计算效率和尾涡面元偶极子强度及位置的精度，有利于提高整个耦合算法的计算效率与计算精度。

第 3 章 基于不同亚格子耗散模型的涡粒子法研究

涡粒子法的空间解析尺度由涡核半径决定，涡核半径一般稍大于涡粒子间的距离，由于涡粒子法的计算耗时会随涡粒子间距的减小而急剧增大，所以一般的工程分析中，涡粒子的间距很难达到可以对湍流进行直接模拟的尺度，这就需要使用大涡模拟的概念，引入亚格子耗散模型。当前，涡粒子法中存在两种亚格子耗散模型，分别是 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型和 Cottet 人工涡粘模型，而现有文献中缺少相关的对比研究。基于这种情况，本章首先讨论涡粒子法和亚格子耗散模型的基础理论；然后分别使用 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型和 Cottet 人工涡粘模型模拟了不同的涡环碰撞过程，根据所得结果分析了两种模型的优缺点，为面元-涡粒子耦合算法中亚格子耗散模型的选择提供了依据。

3.1 涡粒子法基础理论

涡粒子法来源于对涡量输运方程的离散。涡量输运方程是纳维-斯托克斯方程对于不可压流体的另一种表现形式（即速度-涡量形式）。不可压牛顿流体的纳维-斯托克斯方程为：

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (3-1)$$

式中， ρ 为流体密度， \mathbf{u} 为流体速度， t 表示时间， P 表示压强， μ 表示流体的动力粘性系数。根据涡量的定义：

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (3-2)$$

考虑等密度不可压特性，对纳维-斯托克斯方程两边同时取旋度运算可以得到：

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (3-3)$$

此式即为涡量输运方程。其对应的拉格朗日描述为：

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (3-4)$$

式中 $\nu = \mu/\rho$ 是流体的动力粘性系数。涡量输运方程中消除了压强项，数值计算中不再需要压强和速度之间的耦合计算。同时，仍可以通过如下关系恢复流场中的压强：

$$\frac{1}{\rho} \Delta P = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \right). \quad (3-5)$$

在流场中布置拉格朗日离散粒子，并赋予其以下向量作为强度：

$$\boldsymbol{\alpha}_p = \int_{V_p} \boldsymbol{\omega} dV \quad (3-6)$$

式中 p 表示粒子的标识, V_p 表示划分给粒子 p 的流场体积。这种拉格朗日离散粒子即为涡粒子, 流场中的涡量可用涡粒子近似表示为

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_p \boldsymbol{\alpha}_p \zeta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (3-7)$$

式中 \mathbf{x} 表示流场中的位置, \mathbf{x}_p 表示粒子 p 的位置, ζ_ε 是为使涡量光滑分布的磨光算子, 也可称为粒子的光滑核函数, 其具体形式与每个粒子的核半径 ε 有以下关系:

$$\zeta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^3} \zeta\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right). \quad (3-8)$$

粒子的核半径决定了其涡量的分布范围, 小的核半径意味着涡量更加集中的分布在粒子周围。对于磨光函数 ζ , 本文采用涡粒子法中使用最广泛的高斯形式, 即:

$$\zeta(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right). \quad (3-9)$$

此外, 文献[56]在证明涡粒子法收敛性的过程中指出, 为使涡粒子法收敛于纳维-斯托克斯方程的解, 粒子的核半径必须大于粒子间的间距, 该条件被称为重叠条件。

涡粒子法通过涡粒子的运动来模拟流场的发展, 同时粒子的强度也因涡旋拉伸和粘性耗散而发生变化。涡量输运方程的粒子离散形式为:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p) \quad (3-10)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_p}{dt} = \boldsymbol{\alpha}_p \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_p) + V_p \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_p). \quad (3-11)$$

对式 (3-11) 中的涡旋拉伸项 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}$ 进行计算时, 考虑到理论上存在如下恒等式 (使用了关系 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$):

$$[\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla - \nabla^T)] \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (3-12)$$

即理论上, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \mathbf{u}$ 、 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla^T \mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{\nabla + \nabla^T}{2}\right) \mathbf{u}$ 三者是等价的, 可以使用任意一种形式进行计算。而实际计算中, 关系 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ 并不能严格满足, 所以上述三种涡旋拉伸项的计算形式得到的结果是不同的。而文献[61]中指出, 使用转置形式 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla^T \mathbf{u}$ 才能使涡粒子法的微分方程组构成涡量输运方程的弱解, 所以现有的涡粒子法程序多采用转置形式, 式 (3-11) 需更改为

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_p}{dt} = \boldsymbol{\alpha}_p \cdot \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}_p) + V_p \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_p). \quad (3-13)$$

式 (3-10) 和 (3-13) 共同构成了涡粒子法需要求解的常微分方程组。下面对各项的计算方法进行简要介绍。

(1) 速度和速度梯度的计算方法

流场局部速度由未受扰动的自由来流速度和涡粒子的诱导速度组成。诱导速度通过累加所有涡粒子的贡献而得到:

$$\mathbf{u}_{ind}(\mathbf{x}) = \sum_p \mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \boldsymbol{\alpha}_p \quad (3-14)$$

式中 \mathbf{u}_{ind} 表示诱导速度， \mathbf{K}_ε 称为速度核函数，其通过将比奥-萨伐尔定律应用于光滑处理后的涡粒子而得到。速度核函数的具体形式为：

$$\mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{f\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right)}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}. \quad (3-15)$$

式中的函数 f 与光滑核函数有关，当选择高斯形式的磨光函数时，其具体形式为：

$$f(\lambda) = \int_0^\lambda \zeta(s) ds = \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \operatorname{erf}\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) \right] \quad (3-16)$$

式中 erf 为误差函数，定义为：

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta. \quad (3-17)$$

其数值计算方法参见[131]。

根据式 (3-14)，速度的梯度可表示为

$$\nabla \mathbf{u}_{ind}(\mathbf{x}) = \sum_p \nabla \mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \times \boldsymbol{\alpha}_p \quad (3-18)$$

式中 $\nabla \mathbf{K}_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$ 可通过对式 (3-15) 求梯度得到。

若以 N_p 表示涡粒子数量，直接依赖式 (3-14) 计算诱导速度的时间复杂度为 $O(N_p^2)$ ，计算量会随粒子数的增加而急剧增大，限制了数值计算的规模。附录A中介绍的快速多级子算法通过使用粒子簇近似远场涡粒子的影响，可以将计算复杂度降低为 $O(N_p)$ ，使得大规模的涡粒子数值计算成为可能。

(2) 粘性耗散项计算

式 (3-13) 中的粘性耗散项 $V_p \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_p)$ 涉及到涡量的微分，在使用粒子离散的涡量场中难以直接计算。在已有文献中有多种对该项的处理方式，包括随机游走方法、核扩散方法、涡重分布法和涡强交换法等。本文采用近年来使用最为广泛的涡强交换方法 (Particle Strength Exchange, PSE)。该方法的核心是使用积分算子代替拉普拉斯算子，即

$$\Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \approx \frac{2}{\varepsilon^2} \int \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})) d\mathbf{y} \quad (3-19)$$

式中

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-3} \eta\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \quad (3-20)$$

上式中， η 是光滑函数，一般选择为高斯函数。以涡粒子的位置作为积分点对式 (3-19) 中的积分进行数值计算，可以得到：

$$V_p \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_p) = \frac{2\nu}{\varepsilon^2} \sum_q (V_p \boldsymbol{\alpha}_q - V_q \boldsymbol{\alpha}_p) \eta_\varepsilon(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q). \quad (3-21)$$

若各个涡粒子的核半径都相等，则 ε 即为涡粒子的核半径；若涡粒子的核半径是随空间位置而变化的，则式 (3-21) 中的 ε 取所涉及到的两个涡粒子 (p 粒子和 q 粒子) 的核半径的均方根[84, 85]。

(3) 涡粒子重分布过程

如前所述，为使涡粒子法收敛于纳维-斯托克斯方程，粒子核半径须大于粒子间距离。而在实际计算中，随着涡粒子间的相对运动，该条件（即重叠条件）不一定能得到满足，需通过涡粒子重分布过程重新布置涡粒子的位置。新涡粒子的强度使用三维空间插值法得到，并通过合理选择插值函数使得粒子重分布前后涡粒子所表示的涡量场不变。

空间插值法中，新涡粒子强度的计算依赖于以相对位置为自变量的插值函数，即以插值函数为权重对旧涡粒子强度经过加权求和得到新涡粒子强度：

$$\alpha_i = \sum_j \tilde{\alpha}_j W\left(\frac{\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_j}{h}\right) \quad (3-22)$$

式中波浪线表示旧涡粒子对应的量， h 为涡粒子间距， W 是插值函数，一般由一维插值函数进行笛卡尔乘积得到，即

$$W(\mathbf{x}) = W_x(x) \times W_y(y) \times W_z(z) \quad (3-23)$$

式中 x 、 y 和 z 是 \mathbf{x} 的分量， W_x 、 W_y 和 W_z 是三个方向上的一维插值函数。当新的涡粒子不是均匀分布时（ h 非常数值），插值需要在使涡粒子均匀分布的映射坐标系中进行。由于 M_4' 函数不仅具有光滑连续的特点，还能保持涡量三阶矩守恒，因而被广泛应用于涡粒子重分布的插值过程中。本文的相关计算中同样采用 M_4' 函数作为插值函数，其表达式为

$$M_4'(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } |x| > 2 \text{ 时} \\ 0.5(2 - |x|)^2(1 - |x|) & \text{当 } 1 \leq |x| \leq 2 \text{ 时} \\ 1 - 2.5x^2 + 1.5|x|^3 & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时} \end{cases} \quad (3-24)$$

式 (3-10) 和 (3-13) 中的各项得到后，即可使用常微分方程的数值解法对其求解（如欧拉法，龙格库塔法等）。基于网格的流场分析中，时间步受限于网格尺寸与流场速度的比例（CFL数），而涡粒子法中，时间步是受粒子间距 h 和速度梯度的比例限制的：

$$\Delta t < \frac{h}{|\nabla \mathbf{u}|}, \quad (3-25)$$

因此，涡粒子法可取的时间步要比基于网格的算法大很多。

3.2 涡粒子法中的亚格子耗散模型

由于在实际计算中，涡粒子的间距一般难以达到可以对湍流进行直接模拟的尺度，所以需要参照大涡模拟的概念，在涡粒子法中使用亚格子耗散模型。当前，涡粒子法中存在两种亚格子耗散模型，即 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型和 Cottet 人工涡粘模型，而现有文献中缺少对其优缺点的分析与研究。

本节对这两种亚格子耗散模型进行介绍，并在3.3节和3.4节根据数值分析实例对其优缺点进行研究。

3.2.1 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型

大涡模拟的思想是对流场进行低通滤波，将流场分为大的解析尺度和小的亚格子尺度；只直接模拟解析尺度的涡，而用亚格子模型来模拟亚格子尺度和解析尺度间涡的交互。经过低通滤波所得的纳维-斯托克斯方程为：

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3-26)$$

式中上画线表示低通滤波后所得的解析尺度的流场变量， $\boldsymbol{\tau} = \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}$ 为亚格子应力张量（subgrid stress tensor）。若使用人工涡粘模型（artificial eddy viscosity）来处理亚格子应力张量，式（3-26）可转化为[132]：

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + (\nu + \nu_t) \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad (3-27)$$

其中 ν_t 为涡粘系数，一般通过亚格子耗散模型将其与解析尺度的流场变量联系在一起。

Winckelmans [94]在将大涡模拟的思想应用于涡粒子法的过程中观察到经过低通滤波处理的纳维-斯托克斯方程，即式（3-27），与原纳维-斯托克斯方程，即式（3-1），形式一样，只是原流场变量变了解析尺度的流场变量，且粘性系数发生了变化。所以基于式（3-27）推导出的涡粒子法应与3.1节中的结果形式一样，只是变量成为解析尺度的变量，且粘性系数中需加入涡粘系数项。Winckelmans 采用大涡模拟中最经典的 Smagorinsky-Lilly（SL）模型对涡粘系数进行计算，涡粘系数由局部的应变矩阵和滤波尺度（涡粒子核半径）决定，即

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (3-28)$$

式中 Δ 为滤波尺度，在涡粒子法中采用涡粒子的核半径， C_S 为 Smagorinsky 常数，一般取值为0.2， \bar{S} 为解析尺度的流场应变率张量。此即为涡粒子法中的 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型。

3.2.2 Cottet 人工粘性模型

使用磨光算子对涡粒子周围的涡量分布进行光滑处理，导致涡粒子法的控制方程与原涡量输运方程相比，产生了截断误差。Cottet [92] 在分析上述原因产生的截断误差时，发现光滑处理所导致的误差，在某些方向上具有使涡量耗散的效果，而在其他方向上具有反耗散（antidiffusion）的效果。误差产生的反耗散会导致数值模拟发生异常并最终发生不收敛，而产生的耗散效果则为涡粒子法中天然自带的亚格子耗散项。所以，通过计算将误差中的反耗散项分量剔除，留下耗散分量，即可得到一种适用于涡粒子法的亚格子耗散模型，称为 Cottet 人工粘性模型。

该模型的原理及推导过程较为复杂，可参见文献[92]，这里不再赘述。Cottet 人工

粘性模型的具体实施方法可表示为：

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = - \sum_q (\alpha_q V_p - \alpha_p V_q) \{ [\mathbf{u}(\mathbf{x}_p) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_q)] \cdot \nabla \xi_\varepsilon(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q) \}_- \quad (3-29)$$

式中 ξ_ε 为涡粒子的光滑核函数， $\{a\}_- = \min\{a, 0\}$ ，大括号中结果为正时，是需保留的亚格子耗散项，结果为负时，是需剔除的反耗散项。

3.3 不同模型对倾斜双涡环碰撞问题的数值模拟

为对比3.2节中两种亚格子耗散模型的优劣，本节将对文献[4]中的对称倾斜双涡环的碰撞与再连接问题进行模拟。该问题中，初始状态下存在两个相互倾斜的涡环，其位置关于 $x-z$ 平面对称，且与 $x-y$ 平面夹角为 $\theta_0 = 15^\circ$ ，如图3-1所示。涡环的半径为 $R = 1$ ，涡环圆心间距离为 $s = 2.7$ ，两个涡环的环量强度相同（都为 $\Gamma = 1$ ），环量方向相反，左边涡环为逆时针方向，右边涡环为顺时针方向。

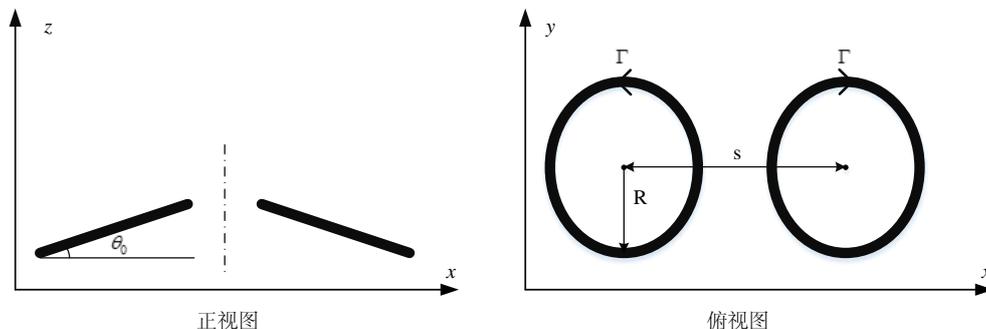


图 3-1 倾斜双涡环碰撞问题中初始时刻的涡环位置和环量方向

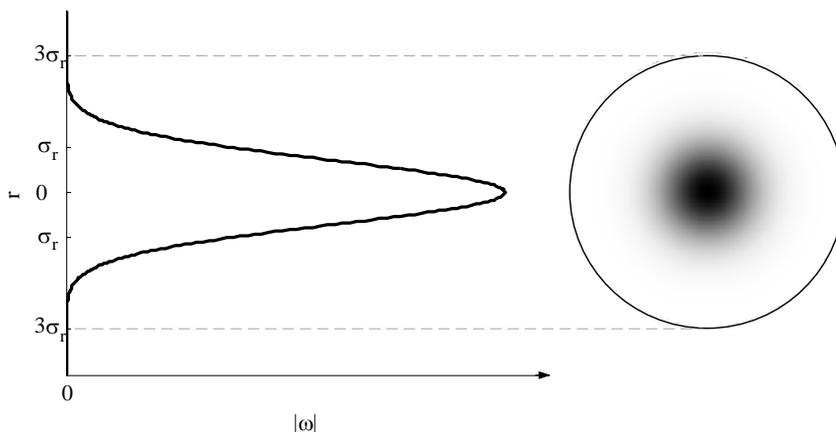


图 3-2 涡环截面上的涡量分布

涡量在涡环截面上满足高斯分布，即

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi\sigma_r^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right) \quad (3-30)$$

式中 r 是相对于涡环截面圆心的半径， σ_r 是描述涡量分布集中度的一个参数， σ_r 越

大，则涡环上的涡量分布越平坦、分散。按式(3-30)所得的涡环截面上的涡量分布如图3-2所示。本节的模拟中取 $\sigma_r = 0.1$ 。

依据式(3-30)表示的高斯分布规律，整个流场中都存在涡量分布。在初始化涡粒子的过程中，只考虑截面半径在 r_{max} 以内的涡量，且 $r_{max} > 3\sigma_r$ 。按此方法，超过99.7%的涡量都被考虑到，且粒子数量也得到了控制。涡粒子初始化的具体过程为：将涡粒子布置在截面上间隔相等的 n_c 个同心圆上（包括圆心），半径的间距为 $h = \frac{2r_{max}}{2n_c-1}$ ，每个圆上布置的涡粒子数应使得相邻涡粒子之间的弧长约为 h ；在涡环上取 N_s 个均布的截面来布置涡粒子， N_s 的选择应使得截面间距离大约等于 h 。如此便得到各方向间隔均约为 h 的涡粒子分布，涡粒子的强度取其位置处的涡强与其所占体积的乘积。本节的模拟中取 $r_{max} = 0.35$ ， $n_c = 4$ ，所得初始涡粒子分布如图3-3所示。

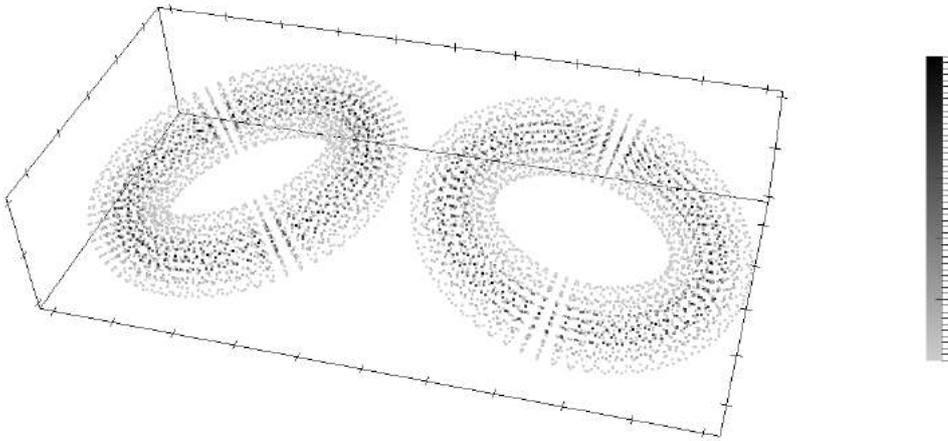


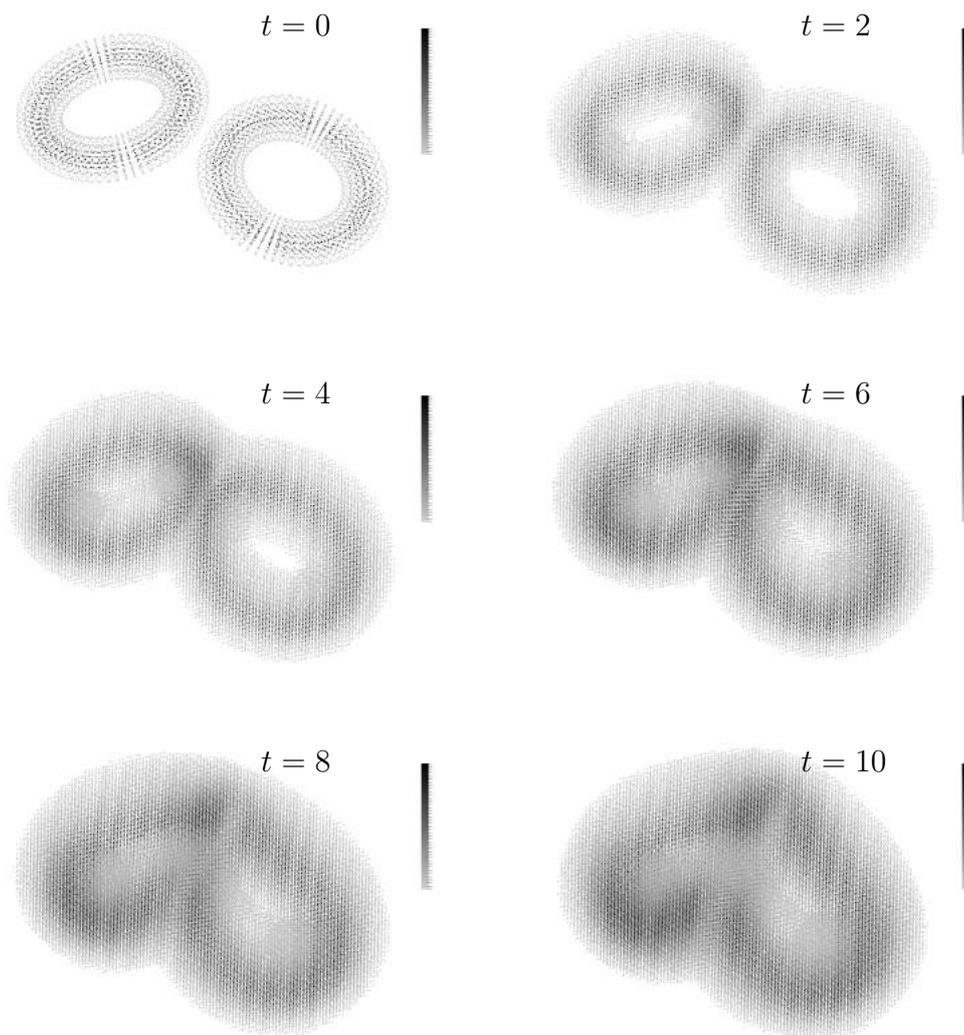
图 3-3 倾斜双涡环碰撞问题中的初始涡粒子分布

涡粒子计算过程中的时间步取为 $\Delta t = 0.05$ ，每隔5步进行一次涡粒子重分布，重分布时新粒子的位置取在 x 、 y 、 z 三个方向上间隔均为 h 的矩形网格节点上，对旧涡粒子的强度进行三维插值计算新涡粒子的强度，所使用的三维插值函数由 M_4' 函数进行笛卡尔乘积得的。为避免涡粒子数目的过快增长，每次涡粒子重分布以后，都要将强度小于某界限值的涡粒子移除，本文模拟中此界限值取为 $10^{-3}|\alpha|_{max}$ ，其中 $\alpha|_{max}$ 为涡粒子初始化后，所得涡粒子强度中的最大值。涡粒子的核半径统一取为 $\varepsilon = 1.2h$ 。

首先，取与[4]中相同的雷诺数 $\mathbf{Re} = \Gamma/\nu = 400$ ，不使用亚格子耗散模型，对倾斜双涡环问题进行直接数值模拟，模拟时长为 $T = 10$ 。模拟过程中不同时刻的涡粒子分布如图3-4所示，由涡强度等值面表示的涡结构如图3-5所示。由于粘性耗散的作用，涡环中涡的分布不断分散，导致涡粒子数量不断增大，涡粒子强度不断减小。两个涡环碰撞后，碰撞处涡量相互抵消，两个涡环熔合并连接成一个涡环。

对于无界、无穷远处涡量为零且不受外力的流场，流场中的涡量 Ω ，冲量 \mathbf{I} 和角冲量 \mathbf{A} 应维持不变[4]，将其统称为流场守恒量，三个流场守恒量的定义分别为：

$$\Omega = \int \omega dx \quad (3-31)$$


 图 3-4 $Re = 400$ 时倾斜双涡环的涡粒子分布变化

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{u} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x} \quad (3-32)$$

$$\mathbf{A} = \int \mathbf{x} \times \mathbf{u} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) d\mathbf{x} \quad (3-33)$$

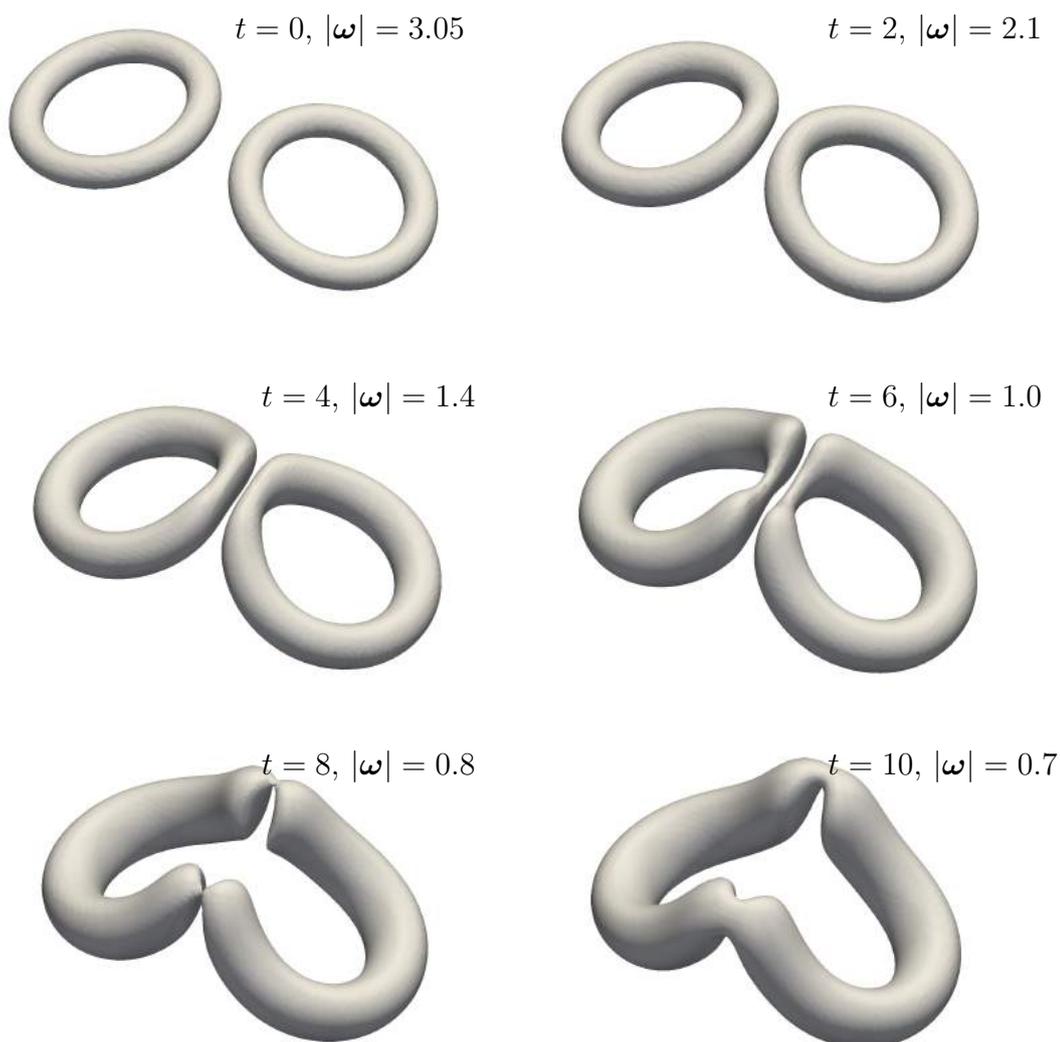
在涡粒子法中，上述三个流场守恒量可表示为：

$$\Omega = \sum_p \alpha_p \quad (3-34)$$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \sum_p \mathbf{x}_p \times \boldsymbol{\alpha}_p \quad (3-35)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \sum_p \mathbf{x}_p \times (\mathbf{x}_p \times \boldsymbol{\alpha}_p) \quad (3-36)$$

这三个流场守恒量的变化可用来评估模拟的准确性。直接数值模拟过程中，三个流场守恒量的变化如图3-6所示。随着模拟的进行，三个流场守恒量都并不严格守恒，但是其变化量较小，与[4]中的结果一致。

图 3-5 $Re = 400$ 时倾斜双涡环的涡结构变化

然后，为对比亚格子耗散模型的效果，将雷诺数提高为 $Re = 40000$ ，涡粒子初始分布不变，分别进行无亚格子耗散模型，SL 亚格子耗散模型，Cottet 人工粘性模型的涡粒子法数值模拟。模拟过程中不同时刻的涡粒子分布分别如图3-7、图3-8和图3-9所示，涡粒子数量的变化如图3-10所示。由于耗散作用，涡的分布范围会逐渐扩大，所以每次重分布后涡粒子数量都会增加。对比不同雷诺数时涡粒子数量的变化以及涡粒子分布的变化可以发现，雷诺数的提高会减小粘性耗散的效果， $Re = 40000$ 时粘性耗散导致的涡量分散没有 $Re = 400$ 时明显。对比不同的亚格子模型，可以发现，使用 Cottet 人工粘性模型的计算中，涡粒子的数量一直多于其他亚格子模型，说明 Cottet 人工粘性模型导致计算中产生了更多的涡量扩散，涡量在流场中的分布范围更加广泛。这是由于在 Cottet 人工粘性模型中，将误差项中的反扩散项进行了剔除所导致的。

其次，无亚格子模型和SL亚格子耗散模型的模拟中，由于涡旋拉伸作用，两个涡环相连的节点处涡粒子的强度明显增大。模拟过程中最大涡粒子强度的变化如图3-11所示，Cottet 人工粘性模型的模拟中，最大涡粒子强度变化平缓，并具有逐步减小的趋

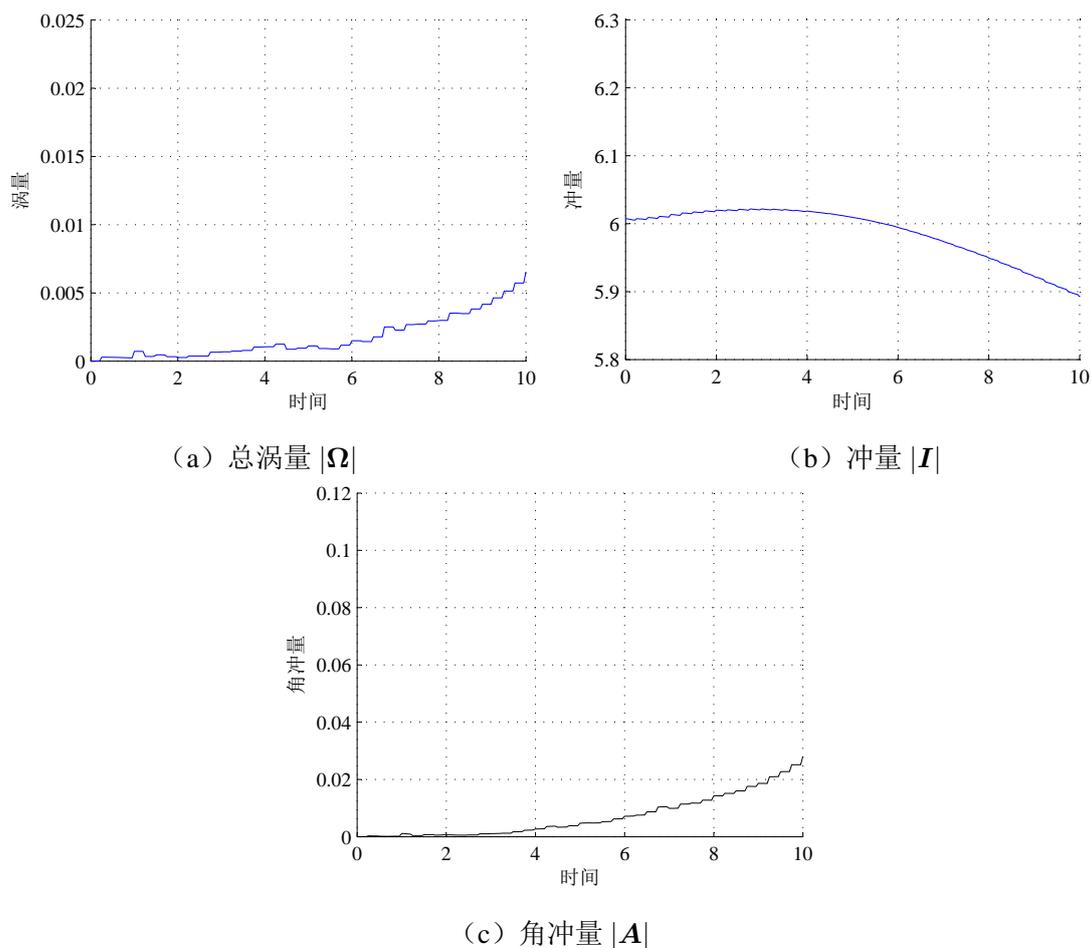


图 3-6 $Re = 400$ 时倾斜双涡环的流场守恒量变化

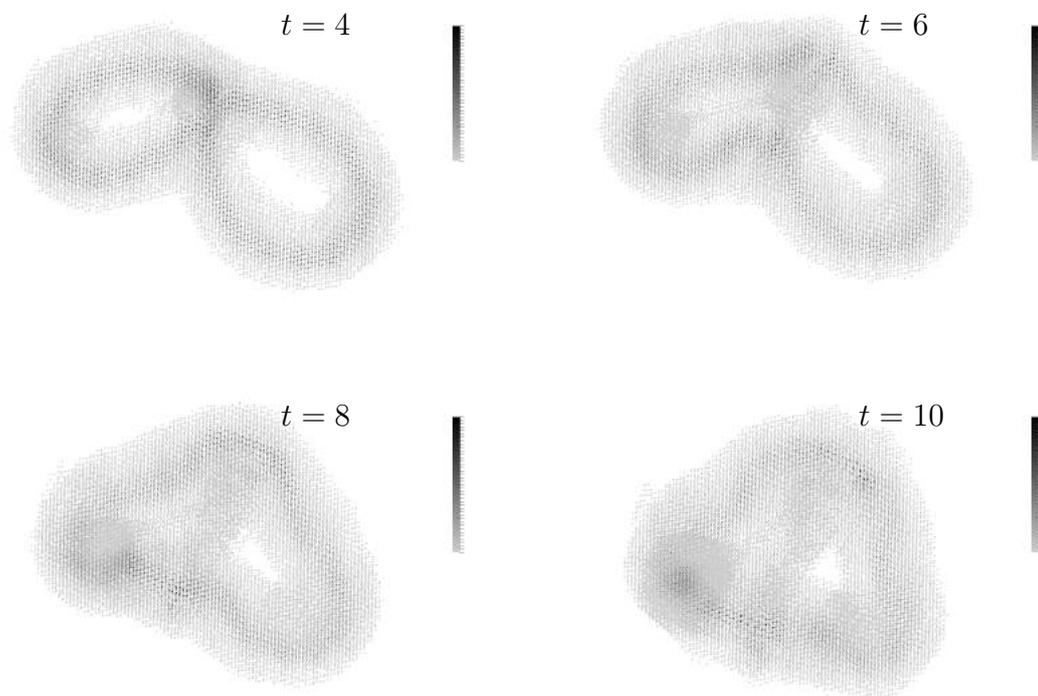


图 3-7 $Re = 40000$ 时倾斜双涡环的涡粒子分布变化（无亚格子耗散模型）

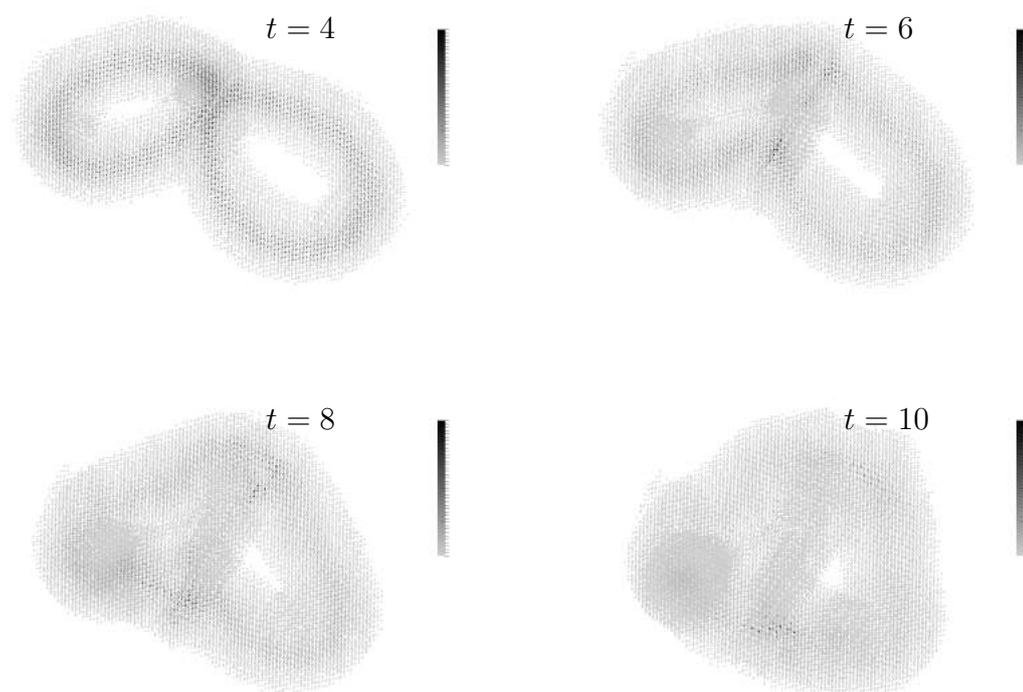


图 3-8 $Re = 40000$ 时倾斜双涡环的涡粒子分布变化 (SL亚格子耗散模型)

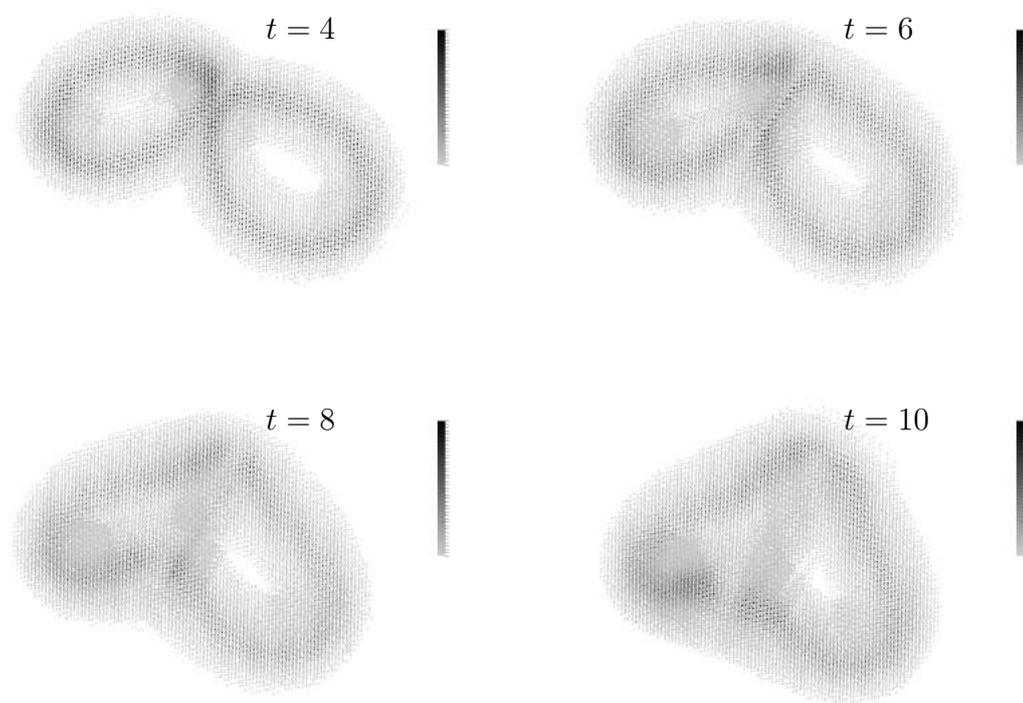


图 3-9 $Re = 40000$ 时倾斜双涡环的涡粒子分布变化 (Cottet人工粘性模型)

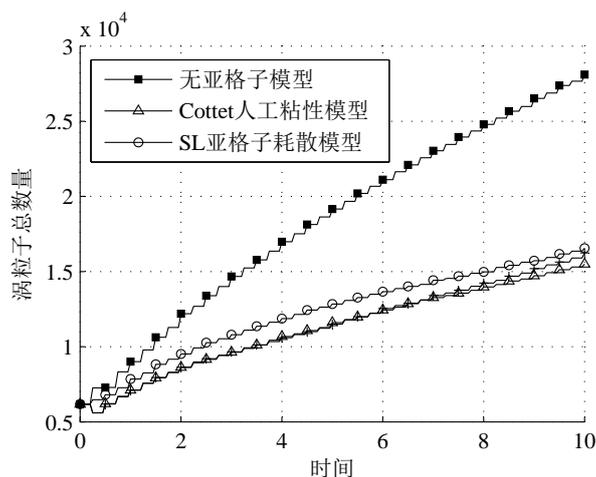
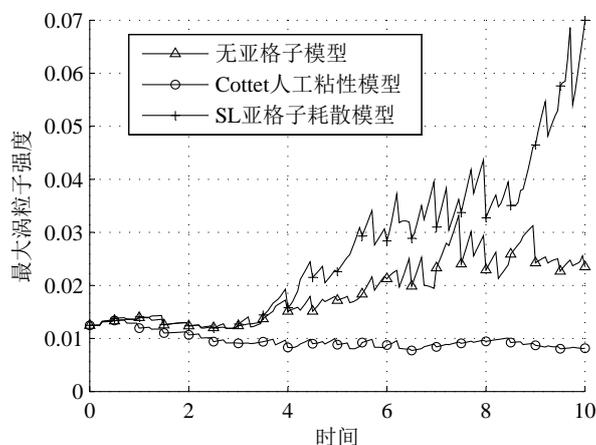


图 3-10 不同数值模拟过程中涡粒子数量的变化

图 3-11 $Re = 40000$ 时倾斜双涡环模拟过程中最大涡粒子强度的变化

势。异常增大的涡粒子强度将导致其所诱导的速度和速度梯度发生异常，最终影响模拟的精确性和稳定性。

模拟过程中涡结构的变化如图3-12、图3-13和图3-14所示，由于涡环连接节点处存在异常的涡粒子强度，无亚格子模型和SL亚格子耗散模型的模拟中，连接处的涡结构发生了紊乱，而Cottet人工粘性模型的模拟中，涡结构仍然平滑合理。

上述三个模拟过程中的流场守恒量的变化如图3-15所示。与图3-6中 $Re = 400$ 时的流场守恒量变化相比，雷诺数增大以后，无亚格子模型的模拟的流场守恒量的变化明显变大，使用SL亚格子耗散模型后，流场守恒量的变化并没有得到改善，甚至更加恶化，而Cottet人工粘性模型使得流场守恒量的变化与 $Re = 400$ 时处于同一个量级。

图3-16给出了数值计算过程中每一步所消耗的CPU时间。从图中可以看出，在涡粒子法模拟中，由于计算元素（即涡粒子）的数量是变化的，所以每一步计算所消耗的计算时间也存在很大的区别。本算例中，单步计算时间是随着计算的进行而逐步增加的，这是由涡粒子数量变化的趋势所决定的。同时，使用Cottet人工粘性模型所需的计算时间是最多的，其次为使用SL亚格子耗散模型的计算，耗时最少的是无亚格子模型

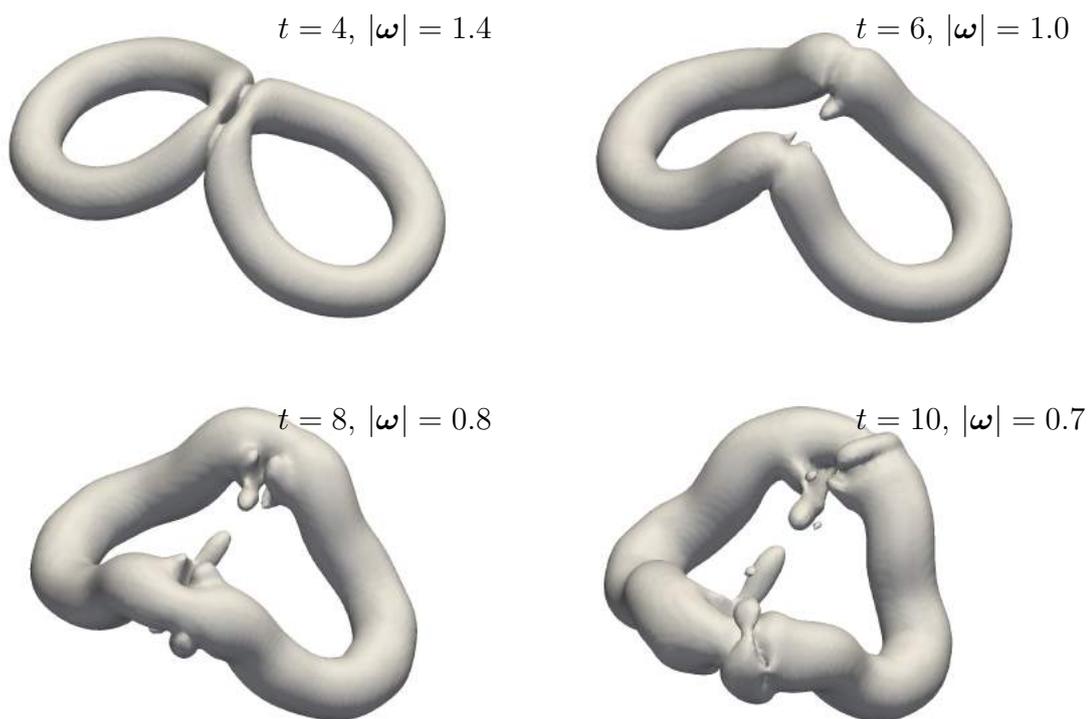


图 3-12 $Re = 40000$ 时倾斜双涡环的涡结构变化（无亚格子耗散模型）

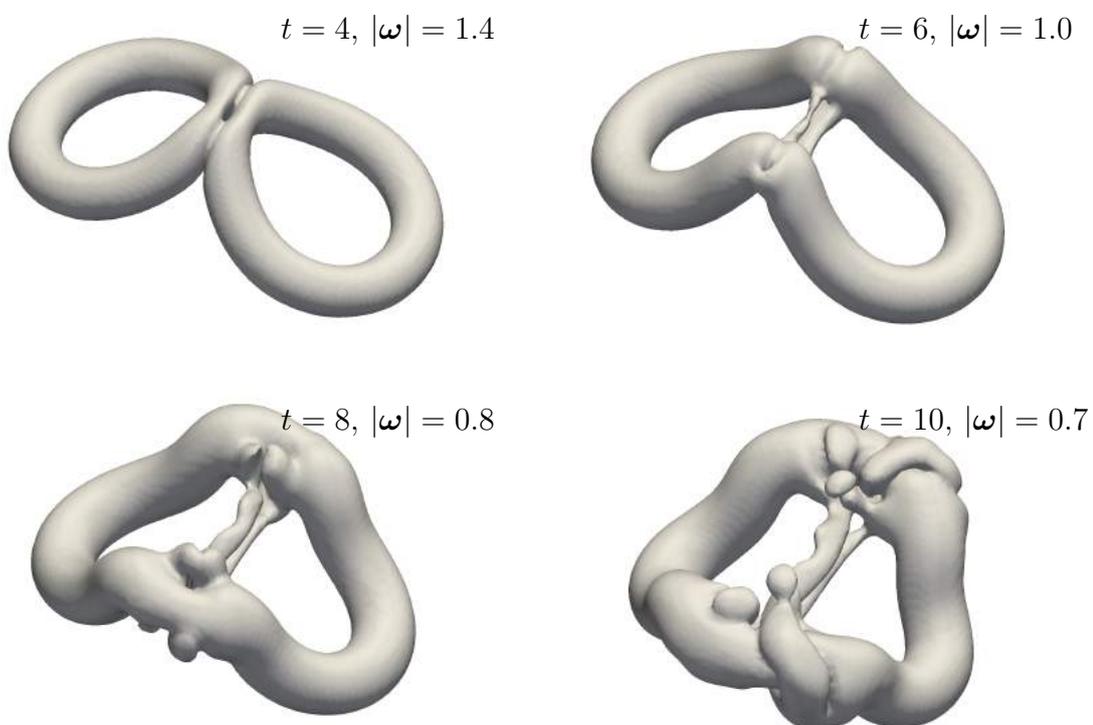


图 3-13 $Re = 40000$ 时倾斜双涡环的涡结构变化（SL亚格子耗散模型）

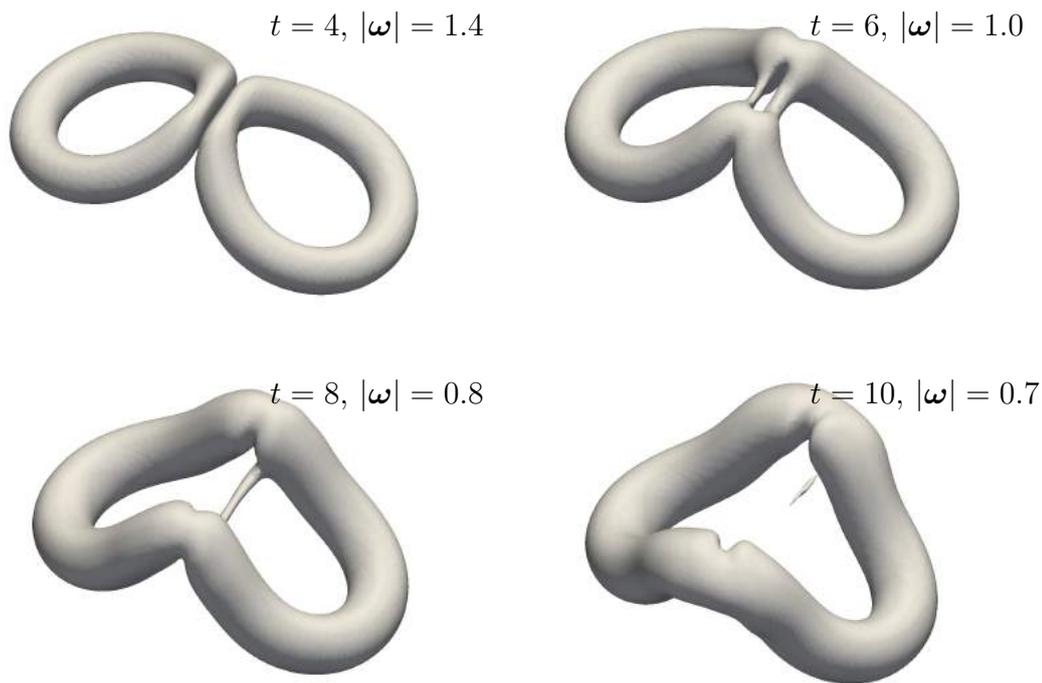


图 3-14 $Re = 40000$ 时倾斜双涡环的涡结构变化 (Cottet人工粘性模型)

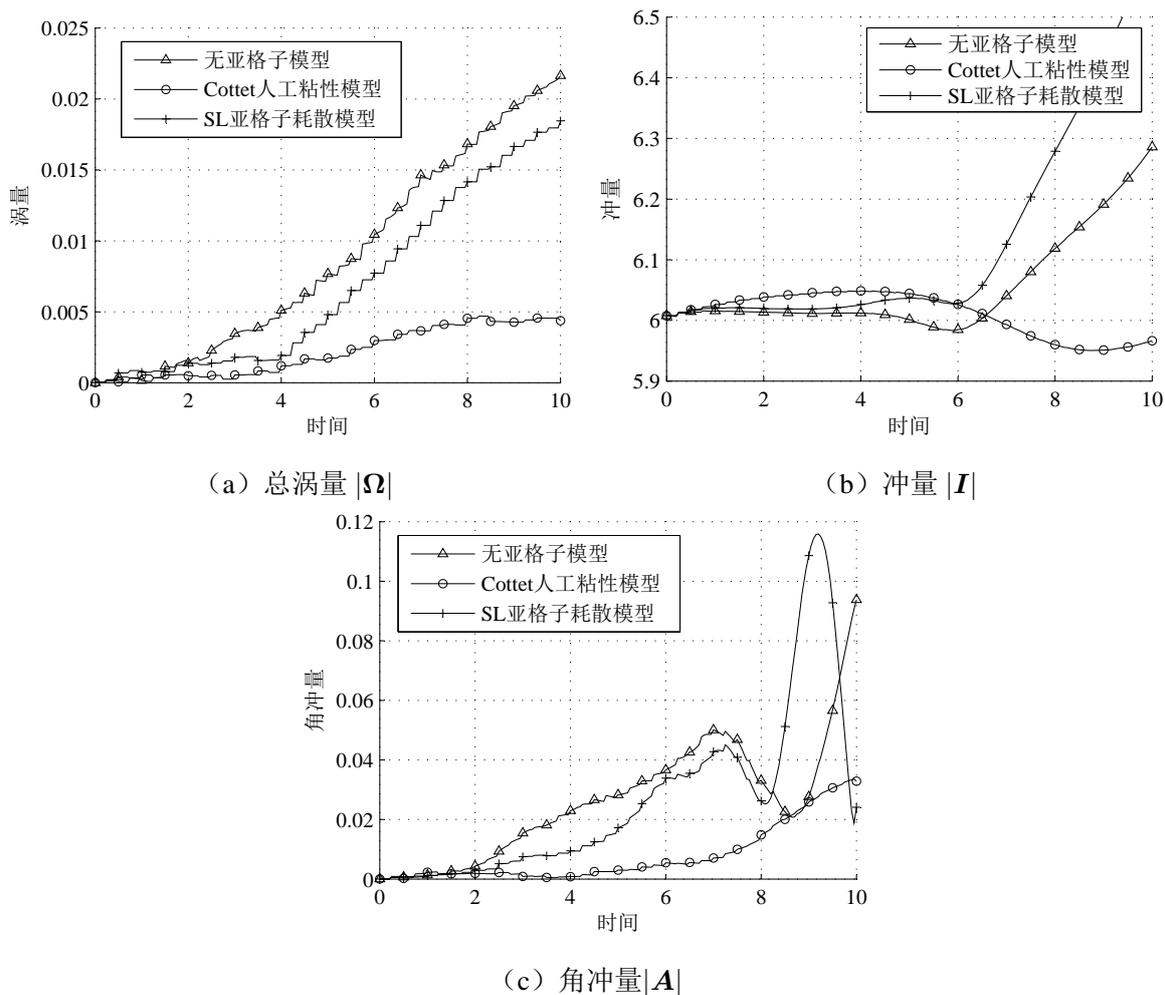


图 3-15 $Re = 40000$ 时倾斜双涡环的流场守恒量变化

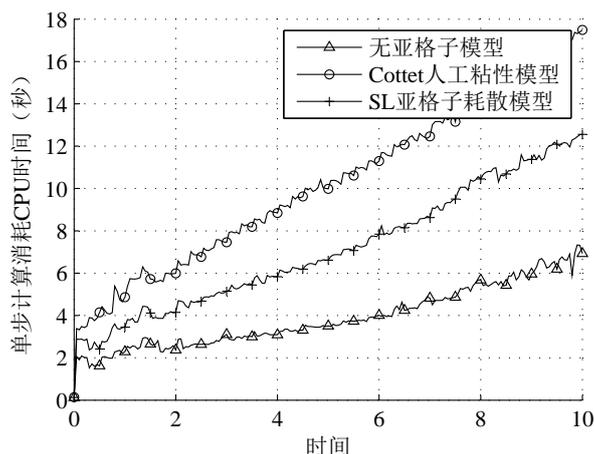


图 3-16 倾斜双涡环模拟过程中每一步所消耗的时间

的直接数值模拟。

为了更加合理的对比不同亚格子模型的计算效率，图3-17给出了单步计算时间随当前涡粒子数量的变化。从图中可以明显的看出，当涡粒子数量相同时，使用 Cottet 人工粘性模型时的单步计算时间最长，其次为SL亚格子耗散模型。这说明，在涡粒子数量相同的情况下，采用亚格子耗散模型后，由于增加了额外的计算，计算效率会有所下降。而 Cottet 人工粘性模型所额外增加的计算量要大于SL亚格子耗散模型，3.2节中介绍的两种模型实现过程的复杂程度也佐证了这一点。

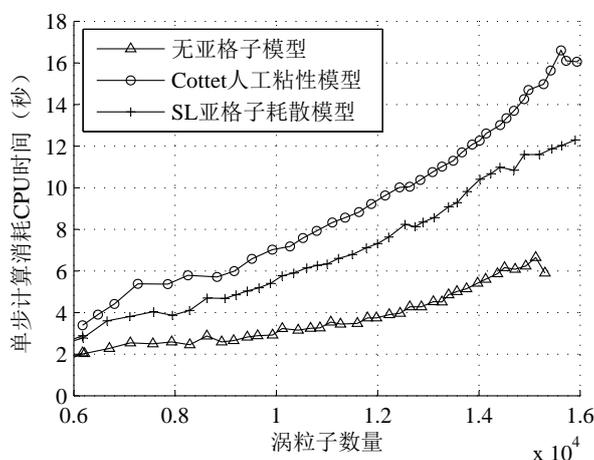


图 3-17 不同的倾斜双涡环模拟中单步计算时间随涡粒子数量的变化

根据以上所得结果，可以得出结论：使用 Cottet 人工粘性模型的涡粒子法计算中流场守恒量的变化更小，涡量扩散更加明显，具有更高的计算精度和稳定性；同时，Cottet 人工粘性模型也需要更多的计算时间。

3.4 不同模型对平行偏置双涡环碰撞问题的数值模拟

为进一步验证上节所得结论，对[5]中提到的另一种配置的双涡环碰撞和再连接过程进行仿真。如图3-18所示，该问题中初始时刻存在两个平行的同向涡环，半径分别

为 $R_1 = 1$ 和 $R_2 = 0.5$ ，小涡环位于大涡环下方，且小涡环圆心与大涡环圆心的水平距离为 R_1 ，垂直距离为 $0.25R_1$ 。涡环截面上的涡量分布仍满足高斯分布规律，涡环环量为 $\Gamma = 1$ ，涡量分布参数为 $\sigma_r = 0.05$ ， $r_{max} = 0.14$ ，涡粒子初始化时取 $n_c = 4$ 。模拟中取雷诺数为 $Re = 10^4$ （文献[5]中为 $Re = 250$ ），时间步为 $\Delta t = 0.05$ ，模拟总时长

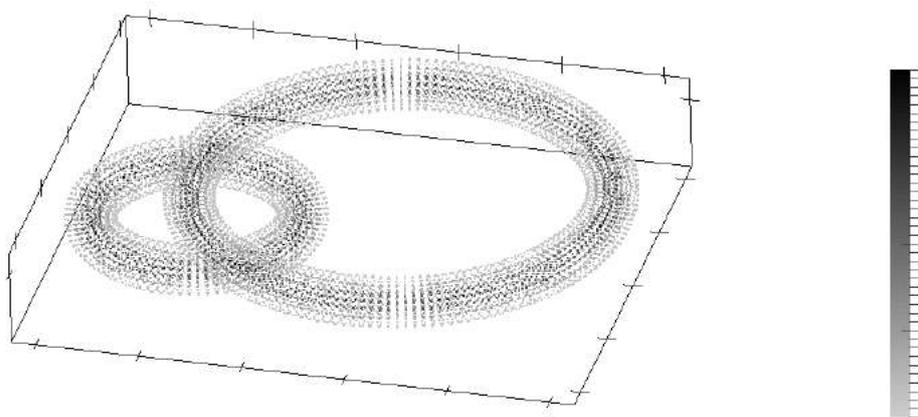


图 3-18 平行偏置双涡环碰撞问题中初始时刻的的涡环位置与涡粒子分布

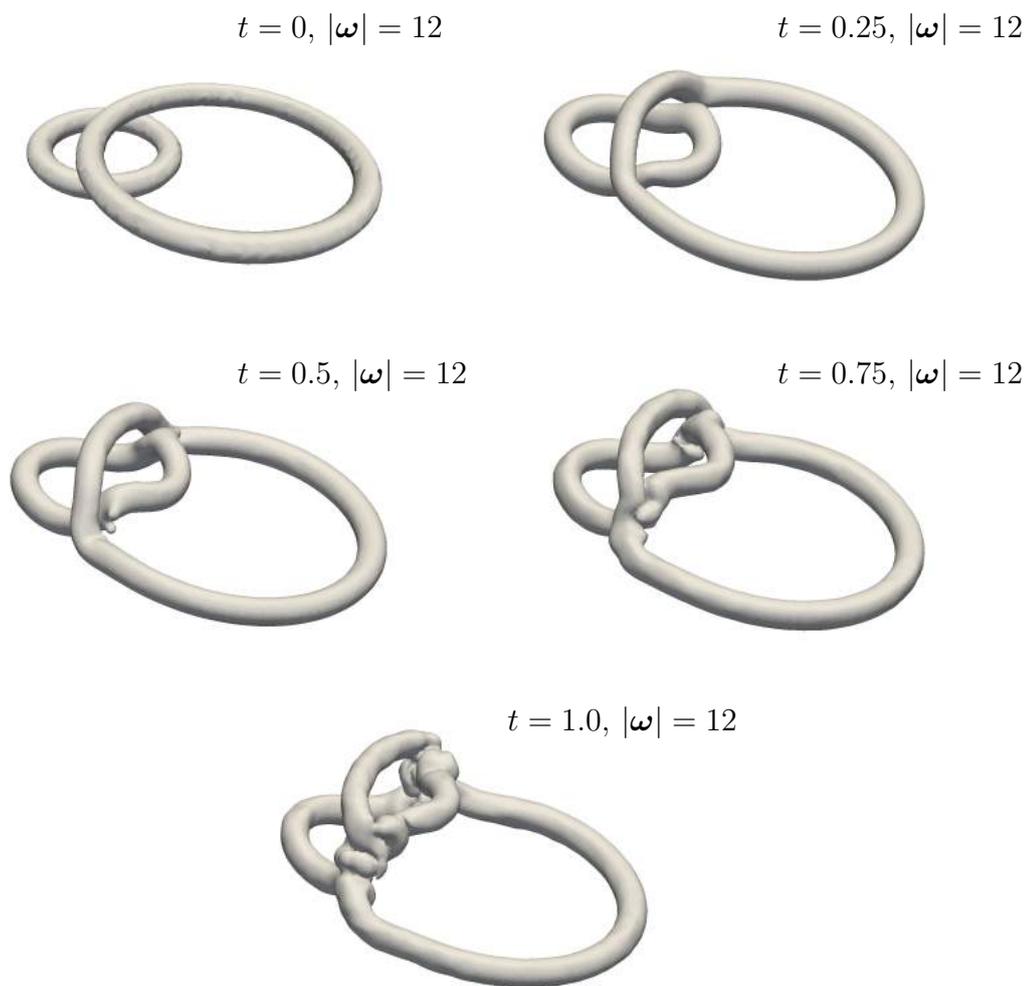


图 3-19 平行偏置双涡环的涡结构变化（无亚格子耗散模型）

为 $T = 6.5$ ，同样每5步进行一次涡粒子重分布。分别进行无亚格子模型，SL亚格子耗散模型，Cottet人工粘性模型的涡粒子法数值模拟。

三个模拟过程中的涡结构变化分别如图3-19、图3-20和图3-21所示，由于小涡环的自诱导速度大于大涡环的自诱导速度，在上升过程中，小涡环追赶上大涡环，并发生碰撞和连接，导致涡结构发生变化，形成两个新的涡环。如图3-19所示，在不使用亚格子耗散模型的模拟中，涡环连接处的涡强异常增大，并导致计算在 $t = 1.2$ 时发生不收

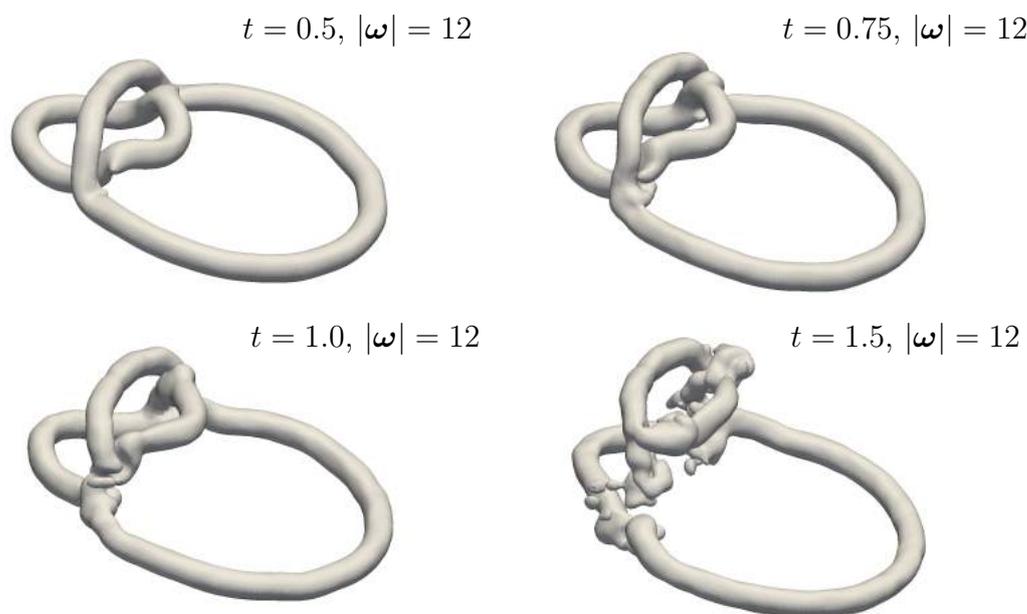


图 3-20 平行偏置双涡环的涡结构变化（SL亚格子耗散模型）

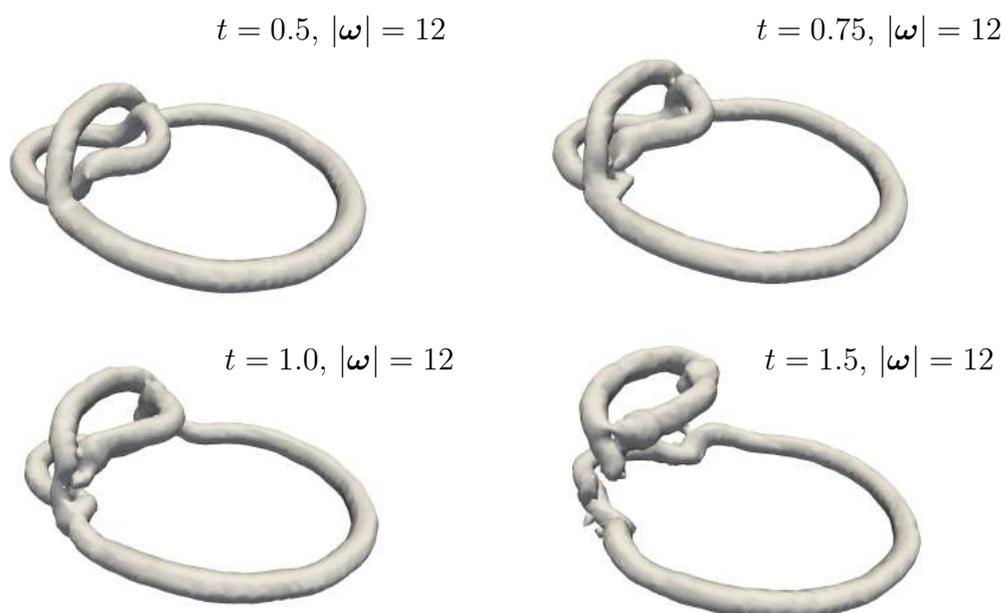


图 3-21 平行偏置双涡环的涡结构变化（Cottet人工粘性模型）

敛。如图3-20所示，在使用SL亚格子耗散模型后，成功地模拟了涡环结构变化的全过程，但在 $t = 1.5$ 时刻，流场涡量分布出现一定程度的紊乱。如图3-21所示，使用Cottet人工粘性模型后，涡环结构变化的全过程也得到了成功地模拟，且最终涡量分布更加平滑光滑。

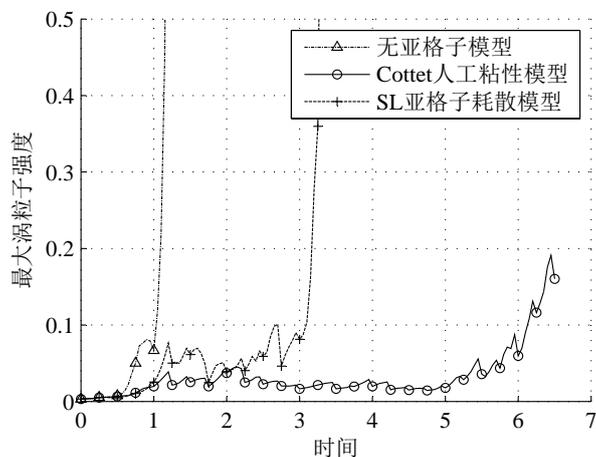
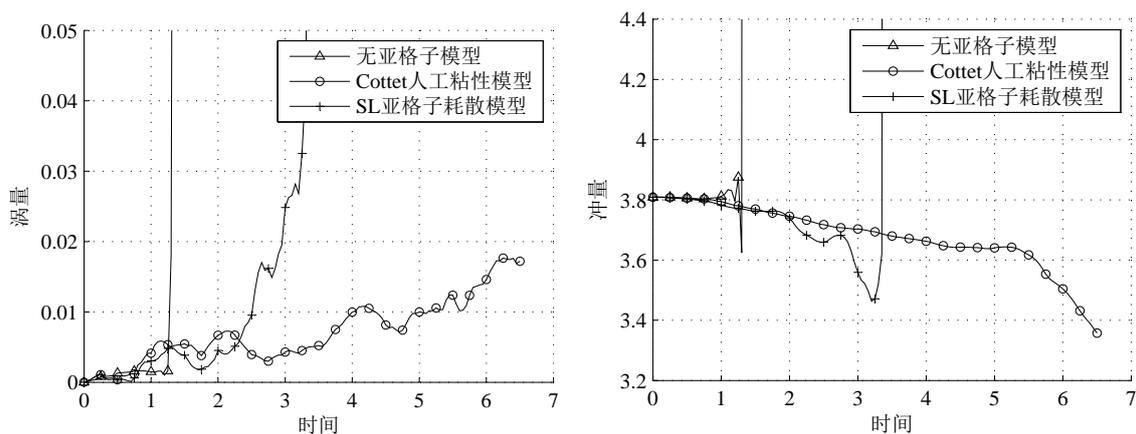
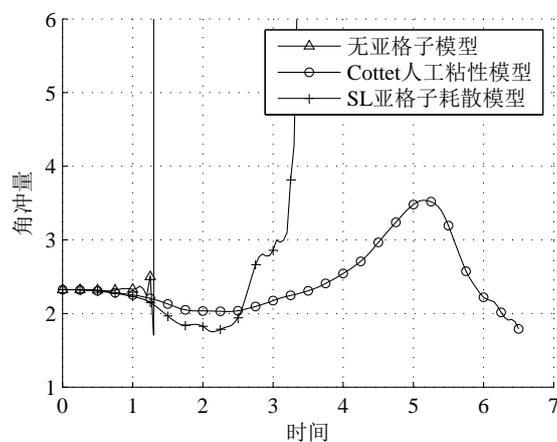


图 3-22 平行偏置双涡环模拟过程中的最大涡粒子强度变化



(a) 总涡量 $|\Omega|$

(b) 冲量 $|I|$



(c) 角冲量 $|A|$

图 3-23 平行偏置双涡环的流场守恒量变化

模拟过程中最大涡粒子强度的变化如图3-22所示，可以观察到，在对平行偏置双涡环碰撞问题的三个模拟中，最大涡粒子强度都有所增加，其中使用Cottet人工粘性模型的模拟中，最大涡粒子强度的增加最为平缓。而其他两个模拟，由于最大涡粒子强度的异常变化，都未能稳定地进行到设定的最终时间。无亚格子模型的计算在 $t = 1.2$ 时刻发生了不收敛，SL亚格子耗散模型的计算在 $t = 3.45$ 时刻发生了不收敛。

模拟过程中，总涡量、冲量和角冲量三个流场守恒量的变化如图3-23所示。从图中可以看出，Cottet人工粘性模型在维持流场守恒量方面的表现要优于SL亚格子耗散模型。

模拟过程中涡粒子数量的变化如图3-24所示。在正常情况下，Cottet人工粘性模型的模拟中的涡粒子数量要多于其他两种模拟。使用SL亚格子耗散模型的模拟在将要发生不收敛的时候，涡粒子数量异常增多，超过了Cottet人工粘性模型的模拟。图3-25给出了单步计算时间随当前涡粒子数量的变化，从图中可以得出和上节一样的结论，即：当涡粒子数量相同时，使用Cottet人工粘性模型时的单步计算时间最长。

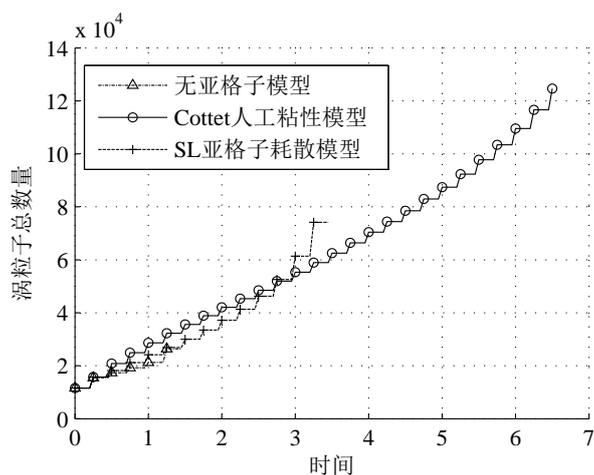


图 3-24 平行偏置双涡环模拟过程中涡粒子数量的变化

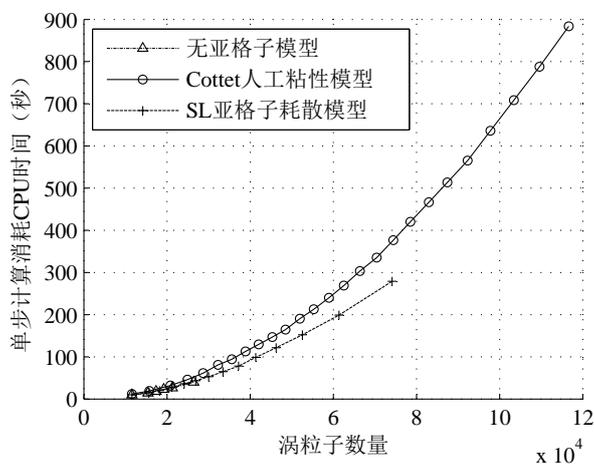


图 3-25 不同的平行偏置双涡环模拟中单步计算时间随涡粒子数量的变化

本节所得结果再次佐证了上节所得结论，即：使用 Cottet 人工粘性模型的涡粒子法计算中流场守恒量的变化更小，涡量扩散更加明显，具有更高的计算精度和稳定性；同时，Cottet 人工粘性模型也需要更多的计算时间。

3.5 本章小结

本章通过对经典涡环碰撞及再连接过程的数值模拟，对比分析了涡粒子法中现有的两种亚格子耗散模型，即 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型和 Cottet 人工粘性模型。根据对涡结构、最大涡粒子强度以及流场总涡量、冲量、角冲量三个守恒量的变化的分析，得出结论：Cottet 人工粘性模型所需计算时间更长，但在维持计算稳定性和精确性方面表现更佳。为保证计算的稳定性和精确性，在第4章和第5章的面元-涡粒子耦合算法中，选用了 Cottet 人工粘性模型。

第 4 章 基于一对多面元-涡粒子转化的面元-涡粒子耦合算法研究

本章将分别在第2章和第3章中得到的面元法和涡粒子法进行耦合，并对面元-涡粒子耦合算法的细节进行研究。为保证所得耦合算法的高效、精确和稳定，在面元法系统中使用了第二章中提出的快速库塔条件实现算法和自适应可变速度光滑参数模型，并根据第三章的结论，在涡粒子法系统中选用 Cottet 人工粘性模型作为亚格子耗散模型。

面元-涡粒子耦合算法中，使用面元法模拟物体表面，使用涡粒子法模拟尾流场。面元法中保留一部分尾涡面元作为缓冲区，缓冲区内的尾涡面元一方面用来满足库塔条件，另一方面被用来转化成涡粒子，实现面元法和涡粒子法之间的过渡与连接。由于涡粒子在模拟涡的发展演变方面要优于面元法，所以缓冲区的长度应尽量小，即尾涡面元应尽早转化为涡粒子。本文沿用文献中广泛使用的缓冲区长度，即缓冲区中保留 2 列尾涡面元。

涡粒子核半径尺寸决定了尾涡面元转化成的涡粒子所表示的薄层粘流区域的厚度，由于涡的总量是不变的，粘流区域的厚度决定了其内部的涡强。因此，涡粒子核半径不能随意确定，与其相关的涡粒子间距也不能随意确定。若要达到所需的涡粒子核半径，耦合算法必须具有产生不同密度涡粒子的能力。本章基于偶极子强度的二维插值，实现了一对多的低阶面元-涡粒子转化算法，使得不同密度涡粒子的产生成为可能；并针对面元-涡粒子耦合算法的特点，对涡粒子重分布过程进行了改进。通过计算实例，进行了参数对水动力性能及流场涡量分布的影响分析，并对算法进行了验证。

4.1 一对多面元-涡粒子转化算法

在面元-涡粒子耦合算法的每个时间步中，都会有一列新的尾涡面元从随边泄出，并加入到缓冲区中，而缓冲区中最下游的一列尾涡面元被转化成涡粒子。此过程的细节如图 4-1 所示。在每一个时间步开始时，缓冲区中存在两列尾涡面元。第一步中，缓冲区中的尾涡面元以当地流场速度进行移动，同时新的一列尾涡面元从升力体随边泄出，此过程与面元法中非定常的尾涡对齐算法一样。此时，缓冲区中存在三列尾涡面元。第二步，缓冲区中最下游的一列面元依据涡守恒的关系被转化为涡粒子，该步骤中应使涡粒子所表示的涡量场尽可能准确。

面元到涡粒子的转化一般是根据曲面上偶极子强度和涡强分布密度 γ （单位面积上的环量）之间的关系进行的，该关系为：

$$\gamma = \mathbf{n} \times \nabla_s \mu \quad (4-1)$$

式中 \mathbf{n} 为曲面法向向量， ∇_s 表示表面微分。根据式 (4-1)，可由面元上的偶极子强度

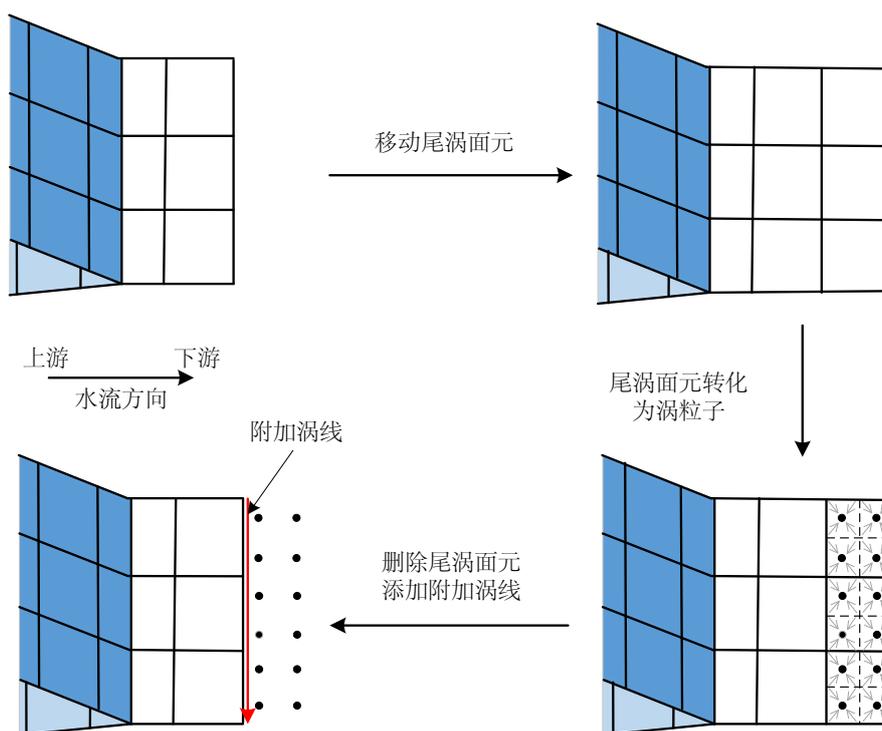


图 4-1 尾涡面元转化为涡粒子的过程

分布求得涡强分布密度，然后对其进行面积分作为涡粒子的强度。

然而，在低阶面元法中，每个面元上的偶极子强度是恒定不变的，导致所得的涡强分布密度在面元上为零，只在面元的边界上非零。因而对涡强分布密度的表面积分无法正常进行。本节提出一种基于对偶极子强度进行二维插值的一对多面元-涡粒子转化算法，即将面元上的偶极子强度看做是面元中心处的值，使用二维插值函数重构面元上偶极子强度的连续分布，然后求得涡强分布密度，并进行表面积分得到涡粒子强度。本节的最后，给出了转化过程中单个面元对应的涡粒子数量的自适应确定方法。

4.1.1 基于二维插值的偶极子连续分布重构算法

如图 4-2 所示，在对面元上的偶极子强度进行二维插值的过程中，共有四种数据点，分别是面元中心、面元的上游边界中心、下游边界中心和弦向端点。如前所述，面元中心处的偶极子强度是已知的（即面元上的偶极子强度）。依据简单的线性插值，可认为上游边界中心处的偶极子强度约等于其相邻的两个面元上偶极子强度的平均值，而下游边界中心处的偶极子强度等于前一个时间步中的上游边界中心处的值。在第一次进行转化时，下游边界中心的偶极子强度设置为零。弦向端点上的偶极子强度亦设置为零。综上，可以得到覆盖整个待转化面元区域的一系列数据点。

一般情况下，随流场运动变形后的一系列尾涡面元并不处于一个平面上，而是立体地分布于三维空间中，所以，在插值过程中，需选取合适的坐标系，并建立面元上三维空间坐标和二维插值平面坐标的对应关系。本文使用一种适应于面元分布的坐标系，如图4-3所示，令顺流方向为横坐标 s ，与之相交的展向（三维翼型算例中）或径向（螺

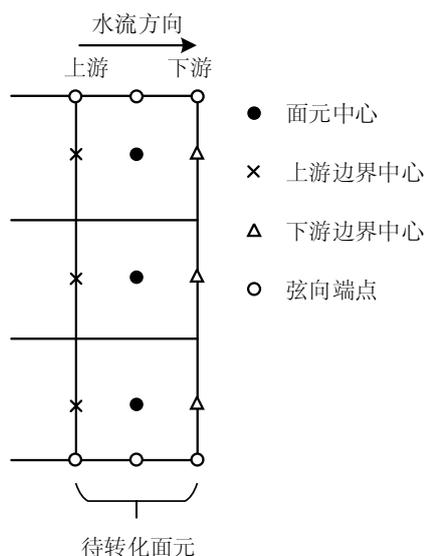


图 4-2 用于偶极子强度插值的数据点

旋桨算例中) 作为纵坐标 t 。在此坐标系中, 所有上游边界上的点都对应 $s = 0$, 所有下游边界上的点都对应 $s = 1$, 而面元中心点对应于 $s = 0.5$; 同一顺流面元边界上的点对应的纵坐标 t 相同, 纵坐标的具体值取上游边界的累积长度。其原因是以曲线长度为自变量对偶极子进行插值更加符合实际空间中的偶极子强度分布, 所得结果更加精确。图4-3中也同时给出了三维面元分布到二维插值坐标系平面的转换。

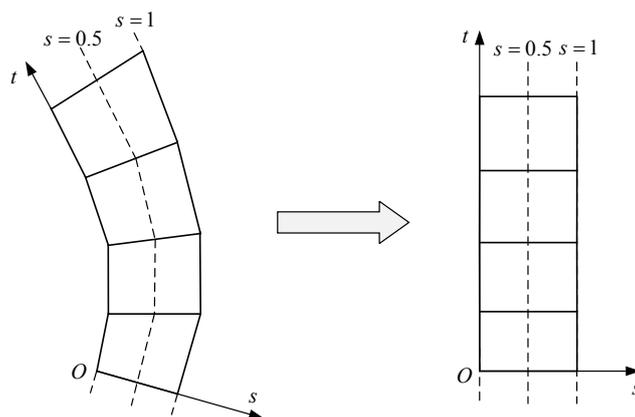


图 4-3 偶极子强度插值过程中的坐标系

在二维插值平面上, 偶极子强度的插值按方向分两步进行。当要获得面元上坐标为 (s', t') 的某点的偶极子强度时, 首先在 $s=0, 0.5$ 和 1 确定的三条线上进行 t 方向上的分段三次样条插值, 分别得到 $(0, t')$, $(0.5, t')$ 和 $(1, t')$ 三点上的偶极子强度; 然后根据这三点的偶极子强度, 进行 s 方向上的分段线性插值, 最终获得 (s', t') 点上的偶极子强度。

依据本小节所述方法，可插值得到面元上任意位置处的偶极子强度。

4.1.2 面元上任意四边形区域到涡粒子的转化

本小节提出一种将面元曲面上任意一小块四边形区域转化为一个涡粒子的方法，作为转化整列面元区域的基础。

设在需转化的一列面元上存在由四个顶点确定的一小块四边形区域，并要将该区域内的偶极子分布等价地转化为一个涡粒子。首先确定该四边形四条边界的中点，并连接对边的中点，形成两个方向 s_1 和 s_2 ，如图4-4所示。然后根据4.1.1小节的二维插值方法得到四个中点上的偶极子强度，并使用一阶线性差商近似 s_1 和 s_2 两个方向上偶极子强度的偏导数，认为此为四边形区域中心处偶极子强度的方向导数。接下来，将上述两个方向导数转化成一对相互垂直的方向 s_x 和 s_y 上的偏导数， s_x 和 s_y 方向的选取如图4-4所示，具体的转化方法为：

$$\frac{\partial \mu}{\partial s_x} = \frac{\partial \mu}{\partial s_1} \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial s_y} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial s_2} - (\mathbf{e}_{s_1} \cdot \mathbf{e}_{s_2}) \frac{\partial \mu}{\partial s_1}}{\mathbf{e}_{s_y} \cdot \mathbf{e}_{s_2}} \quad (4-3)$$

式中 \mathbf{e}_{s_1} , \mathbf{e}_{s_2} 和 \mathbf{e}_{s_y} 分别是 s_1 , s_2 和 s_y 方向上的单位向量。

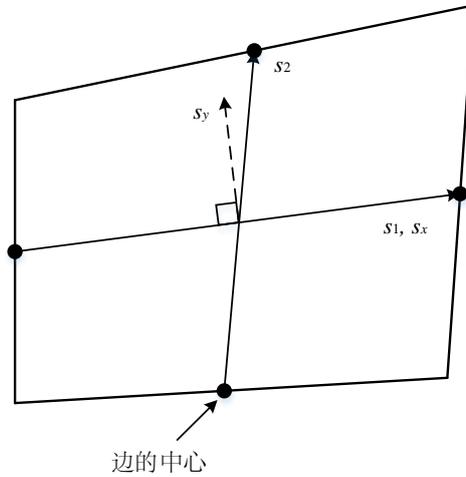


图 4-4 计算偶极子强度表面微分过程中的方向和坐标系

四边形中心处的偶极子强度面微分为：

$$\nabla_s \mu = \frac{\partial \mu}{\partial s_x} \mathbf{e}_{s_x} + \frac{\partial \mu}{\partial s_y} \mathbf{e}_{s_y}. \quad (4-4)$$

若以此近似整个四边形区域内的偶极子强度面微分，则四边形区域内的涡强分布密度处处相等，面积分退化为简单的与面积相乘，最终的涡粒子强度为

$$\boldsymbol{\alpha} = A(\mathbf{n} \times \nabla_s \mu) = A\left(\frac{\partial \mu}{\partial s_x} \mathbf{e}_{s_y} - \frac{\partial \mu}{\partial s_y} \mathbf{e}_{s_x}\right) \quad (4-5)$$

式中 A 是四边形区域的面积， $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{s_x} \times \mathbf{e}_{s_y}$ 是四边形区域的单位法向量。此外，涡粒子的初始位置设定在该四边形区域的中心处。

依据上述的转化算法，面元曲面上任意的一个四边形区域（可以跨越多个面元）都可以等价的转化为一个涡粒子。将待转化的面元曲面划分多个四边形区域后，即可实现对整个面元曲面的等价转化。

4.1.3 单个面元对应的涡粒子数量的自适应确定

虽然上小节所述转化方法可以将跨越多个面元的四边形区域转化为涡粒子，但为了简化算法，且保证面元法和涡粒子法空间离散的关联性和一致性，本文中并不使用跨越面元的转换。如此，一个尾涡面元会对应于若干涡粒子，而对应的涡粒子数量是待定的。

在实际的耦合算法数值计算中，待转化的面元尺寸往往是不同的。尤其在有关螺旋桨的模拟中，尾涡面元的顺流向（或周向）尺寸与所处截面的半径成正比，不同半径处的面元顺流向尺寸存在较大差异。若在计算中，每个面元都转化为相同数目的涡粒子，势必会造成计算资源的浪费和计算效率的降低。针对此问题，提出一种依据所要求的涡粒子间距，自适应确定单个面元对应涡粒子数量的算法，可在满足计算精度的要求下，达到对计算资源的充分利用。

螺旋桨模拟中典型的尾涡面元尺寸分布如图4-5中的左侧实线所示，在半径方向上，梢部面元分布较密，而其他地方分布较稀疏；在顺流方向上，梢部尺寸较大，而根部尺寸较小。在面元-涡粒子转化过程中，如图4-5左侧虚线所示，将每个面元分别沿径向和顺流向均分成若干份，并据此将面元交叉分割成小四边形区域，然后使用4.1.2小节所述方法将每一个小四边形区域转化为一个涡粒子。而自适应算法的目的是确定每一个面元沿径向和顺流向所分割的份数。

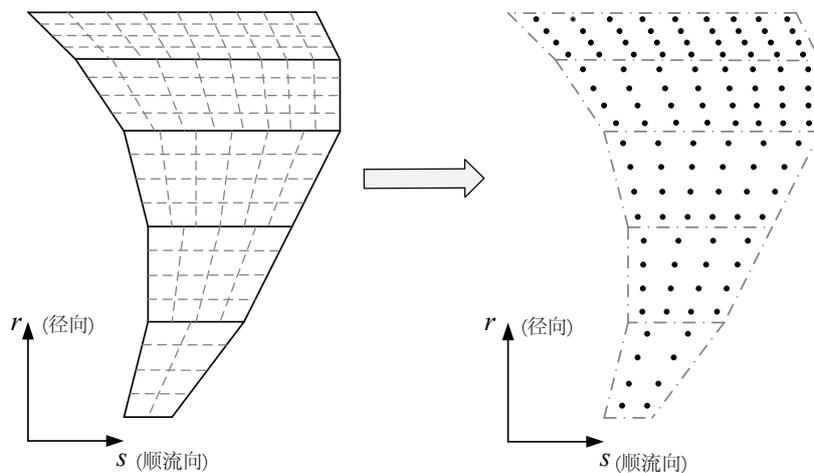


图 4-5 单个面元对应涡粒子数量的自适应确定算法示意

在自适应算法中，每个面元在径向的等分份数是相等的，并统一进行自适应确定；而对顺流向的等分份数进行逐个面元的自适应计算。这种处理方式主要是由所研究问题的流场特性决定的。面元法中，一般梢部面元的径向尺寸较小，而梢部会发生梢涡卷曲，梢涡流场中较大的局部流场应变会导致梢部涡粒子的间隔随着涡粒子的向下游移动而增大，所以转化时梢部涡粒子的径向间隔应小于其他部位。采用径向等分份数相等的处理方式，转化所得涡粒子的径向间隔自动满足了计算的要求，更加合理。

若记允许的最大粒子间距为 h ，径向第 i 个面元的径向尺寸为 Δr_i ，顺流向尺寸为 Δs_i 。则面元径向等分份数为

$$n_{r,i} = \left\lceil \frac{\max \Delta r_i}{h} \right\rceil \quad (4-6)$$

顺流向等分份数为

$$n_{s,i} = \left\lceil \frac{\Delta s_i}{h} \right\rceil \quad (4-7)$$

式中 $\lceil \cdot \rceil$ 为向上取整运算。自适应算法确定的典型面元分割与转化后得到的涡粒子分布如图4-5所示。

最后，需要说明的是，在面元到涡粒子的转化过程中，除在流场中加入涡粒子外，还需要在被转化面元的上游边界处加入一条附加涡线。其环量在数值上等于上游边界中点处的偶极子强度，环量方向如图4-1中所示。这条涡线可以理解为偶极子强度在上游边界处由面元上的值到零的突变所导致的集中环量分布，也可以理解为用来中和涡粒子上的涡量，以满足开尔文环量守恒定律。附加涡线并不随流场移动，而是在每次进行面元-涡粒子转化时，删除旧的附加涡线，并代替以新的附加涡线。

4.2 基于一对多面元-涡粒子转化的面元-涡粒子耦合算法

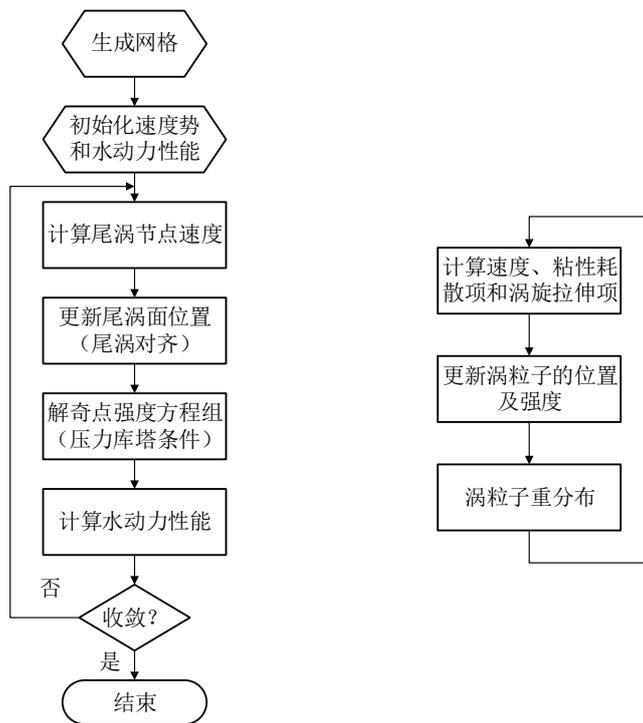
本节首先给出面元-涡粒子耦合算法的具体流程，然后针对耦合算法的特点对涡粒子法中的涡粒子重分布过程进行了改进。

4.2.1 耦合算法流程

面元-涡粒子耦合算法中，使用面元法模拟物体表面，使用涡粒子法模拟尾流场。通过以下三个方面考虑面元法系统和涡粒子法系统之间的相互影响，实现二者的耦合：（1）计算面元系统在各涡粒子位置处产生的诱导速度及速度梯度，并在更新涡粒子位置和强度的过程中作为自由来流的一部分加以考虑。（2）计算涡粒子系统在面元控制点上产生的诱导速度，并在更新尾涡面位置和计算源汇强度时，作为自由来流的一部分考虑；在计算水动力性能时，作为扰动速度的一部分考虑。（3）通过一对多面元-涡粒子转化算法生成涡粒子。

根据第2章和第3章的描述，面元法和涡粒子法的算法流程如图4-6所示。将二者进行耦合，所得的面元-涡粒子耦合算法流程如图4-7所示，涡粒子对面元的诱导速度在解奇点强度方程组（计算源汇强度）、计算水动力性能和计算尾涡节点速度三个模块中都

会使用。



(a) 面元法 (b) 涡粒子法

图 4-6 未经耦合的面元法和涡粒子法算法流程

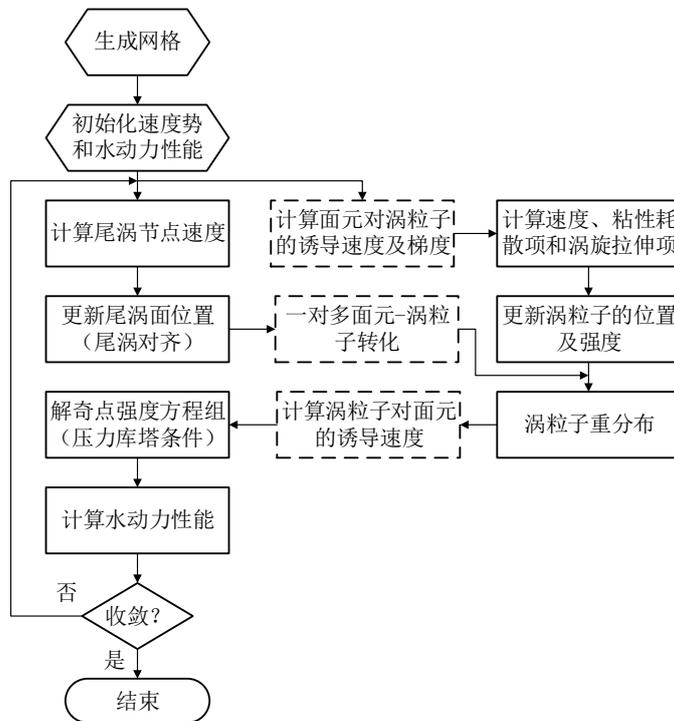


图 4-7 面元-涡粒子耦合算法流程图

4.2.2 耦合算法中的涡粒子重分布过程

面元-涡粒子耦合算法中的涡粒子分布具有其独有的特点：(1) 尾涡中涡的发展在时间和空间上具有对应关系，从随边泄出的尾涡在空间上向下游移动时，对应的在时间上进行发展和演变。所以，涡粒子的分布在上游是规律的，随着流场的发展，在下游受到流场局部应变的影响，逐渐变得不再规律，或不再满足重叠条件。(2) 上游涡粒子与缓冲区内的尾涡面元和物体表面面元距离较近，而涡粒子重分布一般会扩展涡粒子分布的范围，对上游涡粒子进行重分布，易导致涡粒子与面元相互穿插，出现数值处理非常复杂的情况。

考虑到上述特点，耦合算法中在进行涡粒子重分布时，会设定一个涡粒子重分布起始位置，此位置之前为非重分布区域，其后为重分布区域。每次涡粒子重分布时只对重分布区域中的涡粒子进行重分布，非重分布区域中的涡粒子维持不变。涡粒子重分布过程中仍然使用由 M'_4 函数进行笛卡尔乘积所得的三维插值函数来插值得到新涡粒子的强度。在每次涡粒子重分布以后，将强度小于强度临界值的涡粒子进行移除。本文的计算中，若不加以特殊说明，强度临界值为 $10^{-3}|\alpha|_{max}$ ，其中 $|\alpha|_{max}$ 为第一次进行尾涡面元到涡粒子的转化时，所产生的涡粒子强度中的最大值。

上述涡粒子重分布算法的简单示意如图4-8所示，具体流程如下：

1. 设定涡粒子重分布起始位置 x_{rds} 与涡粒子间距 h ；
2. 遍历所有涡粒子，确定涡粒子在空间的分布范围，即涡粒子位置的最值 x_{min} 、 x_{max} 、 y_{min} 、 y_{max} 、 z_{min} 和 z_{max} ；
3. 依据旧涡粒子的分布范围确定重分布后新涡粒子的分布范围，即

$$x_{low} = \left(\left\lfloor \frac{\max(x_{rds}, x_{min})}{h} \right\rfloor - 2 \right) h \quad (4-8)$$

$$x_{up} = \left(\left\lceil \frac{x_{max}}{h} \right\rceil + 2 \right) h \quad (4-9)$$

$$y_{low} = \left(\left\lfloor \frac{y_{min}}{h} \right\rfloor - 2 \right) h \quad (4-10)$$

$$y_{up} = \left(\left\lceil \frac{y_{max}}{h} \right\rceil + 2 \right) h \quad (4-11)$$

$$z_{low} = \left(\left\lfloor \frac{z_{min}}{h} \right\rfloor - 2 \right) h \quad (4-12)$$

$$z_{up} = \left(\left\lceil \frac{z_{max}}{h} \right\rceil + 2 \right) h \quad (4-13)$$

式中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 和 $\lceil \cdot \rceil$ 分别为向下和向上取整运算。然后，分别在 x, y, z 三个方向上设置间隔为 h 的均布网格，将区域 $[x_{low}, x_{up}] \times [y_{low}, y_{up}] \times [z_{low}, z_{up}]$ 等分为边长为 h 的六面体单元，并以六面体单元的中心作为布置新涡粒子的位置；

4. 定义容量为 $N_{cell} \times 3$ 的数组 a_{new} 来记录新涡粒子的强度，其中 N_{cell} 为六面体单元总数。将数组 a_{new} 所有单元初始化为零，并建立其行号与六面体中心的空间位置的一一对应关系；
5. 定义类型为涡粒子数据结构的空链表 $rest$ ，用来存放非重分布区域内的涡粒子；

6. 遍历每一个旧的涡粒子，进行位置判断：1) 当其位于非重分布区域内时（即 $x_p < x_{rds}$ ），将其加入链表 $rest$ ；2) 当其位于重分布区域内时（即 $x_p \geq x_{rds}$ ），根据三个 M_4 函数进行笛卡尔乘积所得的三维插值函数，将其强度分布到临近的64个新涡粒子位置上，并根据对应关系叠加到对应的 a_{new} 的元素上；
7. 删除所有的旧涡粒子，将 $rest$ 链表中的涡粒子依次加入新涡粒子链表；
8. 遍历数组 a_{new} 的每一行元素，当其表示的涡粒子强度小于强度临界值时，跳过此行元素不进行任何操作；否则以该行元素为强度，以其对应的六面体中心坐标为位置，以 h^3 为体积，以 $1.2h$ 为核半径创建新涡粒子，并将其加入新涡粒子链表。

在第3章的计算中，我们观察到涡粒子重分布一般会使得涡粒子数目增多。本节提出的涡粒子重分布步方法不仅可以避免产生与面元距离过近的涡粒子，还可以在保证整个流场的涡粒子满足重叠条件的前提下，避免涡粒子的过度增多，从而提高计算效率。

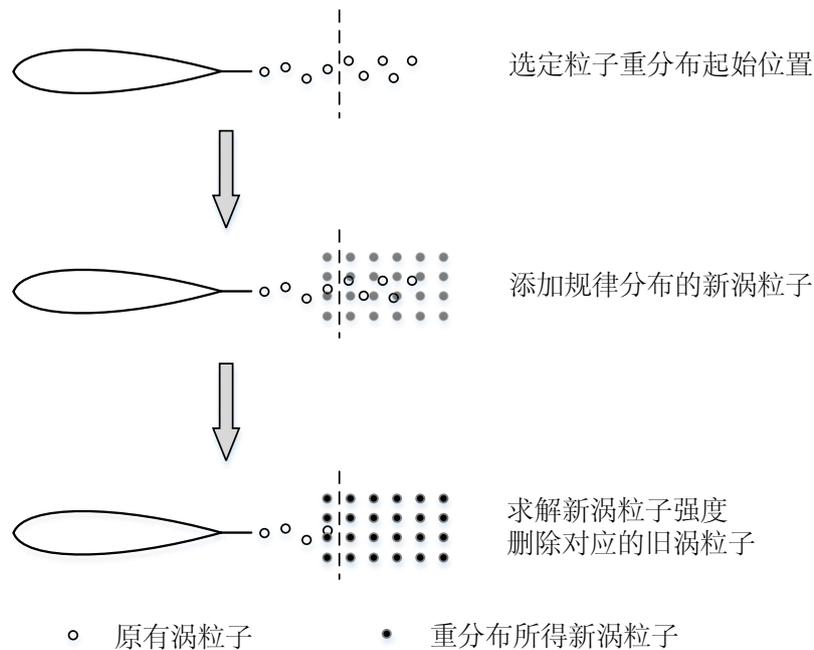


图 4-8 面元-涡粒子耦合算法中的涡粒子重分布过程

4.3 计算实例及参数影响分析

本节使用所提出的面元-涡粒子耦合算法，对三维椭圆水翼的尾流场以及水动力性能进行分析，在验证所得算法的有效性的同时，分析涡粒子密度以及重分布参数对计算结果的影响。

椭圆水翼的截面形状取NACA 0012翼型截面，最大弦长 1m，展长 2m，轮廓根据椭圆方程确定，水翼形状如图4-9所示。该水翼以 10° 的攻角和 $1m/s$ 的速度在静止流体中

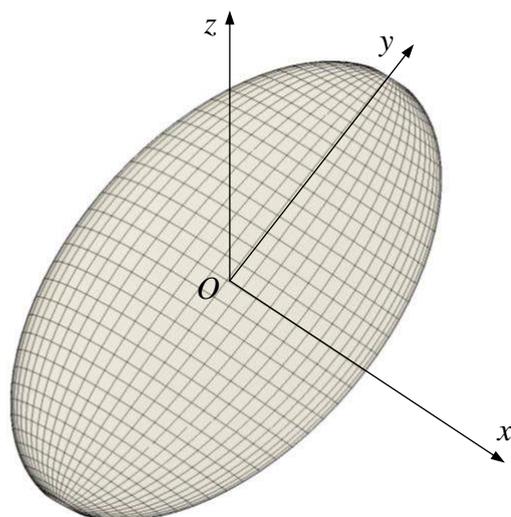


图 4-9 椭圆水翼表面面元与坐标系示意

前进，流体的动力粘性系数取 $\nu = 10^{-6}$ ，以最大弦长为特征尺寸的雷诺数为 $Re = 10^6$ 。模拟的时间步长设定为 $0.1s$ ，一个尾涡面元的弦向长度约为 $0.1m$ 。

椭圆水翼表面用面元进行离散，弦向面元数量取60（吸力面和压力面各30），展向面元数量取40，两个方向的面元分布都采用余弦分布规律。所得弦向最大面元尺寸约为 $0.1m$ ，椭圆水翼表面面元布置如图4-9所示。为了描述的简洁性，本节引入图4-9中所示的坐标系：其原点选在水翼的几何中心处，下游方向为 x 正方向，垂直向上为 z 正方向， y 方向由右手定则确定。

在对水翼的模拟中，由于尾涡面元顺流向尺寸基本一致，所以暂不使用自适应面元-涡粒子转化算法，而是将每一个尾涡面元转化为相同数量的涡粒子 ($n_p * n_p$ 个)，所得涡粒子的间距约为

$$h = \frac{0.1m}{n_p}, \quad (4-14)$$

在进行涡粒子重分布时，涡粒子间距也设定为 h ，不加说明时，涡粒子核半径选择为 $1.2h$ 。

为了研究不同涡粒子重分布参数的影响，针对椭圆水翼问题共使用8种不同配置的面元-涡粒子耦合算法进行了数值计算。详细设置见表4-1，其中 x_{rds} 表示涡粒子重分布起始位置， $x_{rds} = \infty$ 意味着不进行涡粒子重分布， I_{rds} 表示涡粒子重分布的时间步间隔。

此外，针对上述椭圆水翼问题，还分别使用面元法和商业RANSE求解器CFX进行了分析。面元法中的配置与耦合算法一致。根据问题的特性，CFX的计算中使用了对称边界条件，采用的流体域如图4-10所示，水翼距离入口 $10C$ ，距离出口 $25C$ ，距离上下边界各 $10C$ ，流体域宽度取为 $5C$ ，其中 C 表示椭圆翼的最大弦长。CFX的计算网格使用 Ansys ICEM CFD® 软件生成的六面体结构网格，在梢涡出现的地方对网格进行

表 4-1 椭圆水翼分析中的不同配置

序号	$n_p * n_p$	h	x_{rds}	I_{rds}
1	1*1	0.1m	1m	1
2	1*1	0.1m	2m	1
3	1*1	0.1m	4m	1
4	1*1	0.1m	∞	1
5	2*2	0.05m	∞	1
6	5*5	0.025m	∞	1
7	5*5	0.025m	1m	1
8	5*5	0.025m	1m	5

了加密，最终网格数为 337 万。水翼周围的网格分布和梢涡处的网格分布如图4-11所示，可以看到，计算所得的梢涡位于网格加密区内。计算中采用 $k-\omega$ SST (Shear Stress Transport, 剪切应力传输) 湍流模型。

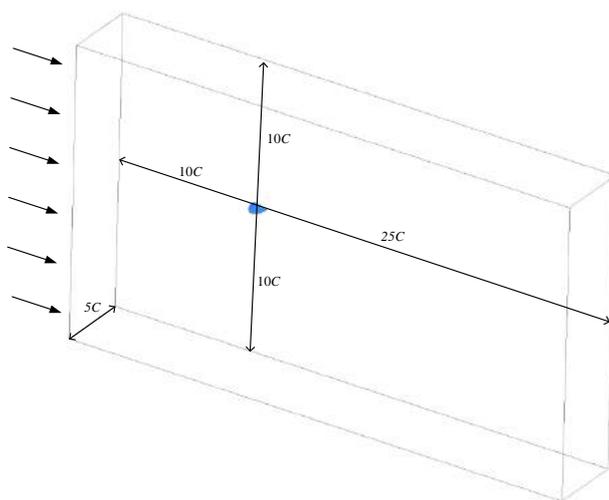


图 4-10 椭圆水翼CFX计算中所采用的流体计算域

4.3.1 对水动力性能的影响分析

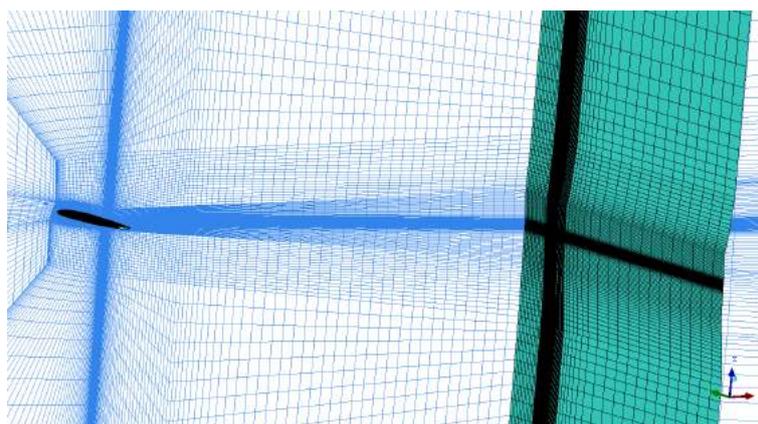
表4-2中给出了不同配置计算所得的升力系数 C_l 和阻力系数 C_d ，两种系数的定义为：

$$C_l = \frac{F_l}{0.5\rho v^2 CB} \quad (4-15)$$

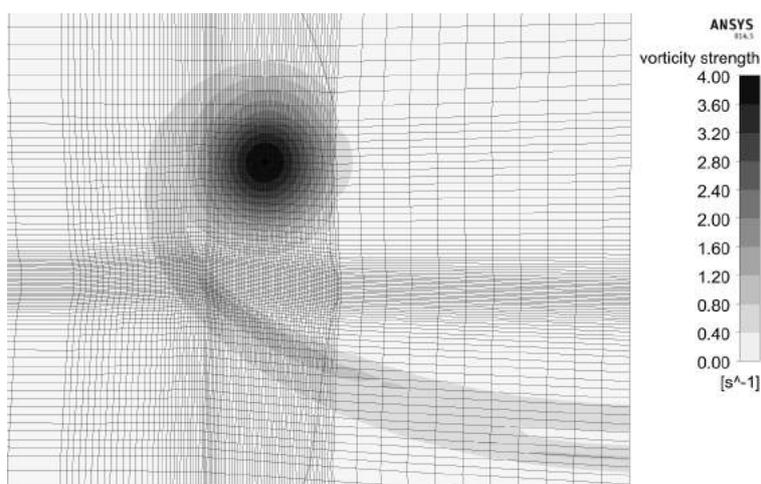
$$C_d = \frac{F_d}{0.5\rho v^2 CB} \quad (4-16)$$

式中， ρ 为流体密度， v 是水翼前进速度， C 是最大弦长， B 为展长， F_l 和 F_d 分别为水翼所受升力和阻力。

从表4-2中可以看出，不同配置的耦合算法所得的升力系数和阻力系数之间的差别很小，都在1%的范围内，且不同重分布位置所引起的差别在0.1%以内。而面元法



(a) $x - y$ 和 $x - z$ 平面上的网格



(b) 梢涡处的网格

图 4-11 CFX 计算中椭圆水翼周围的计算网格

表 4-2 不同配置计算所得的椭圆水翼水动力性能

配置序号	C_l	C_d
1	0.4019	0.03697
2	0.4017	0.03697
3	0.4016	0.03697
4	0.4016	0.03697
5	0.4012	0.03694
6	计算不收敛	
7	0.4022	0.03661
8	0.3990	0.03679
CFX	0.3892	0.03539
BEM	0.4051	0.03680

和CFX所得结果与耦合算法所得结果之间的差异要更明显一些，面元法所得升力系数要比耦合算法的大1%，阻力系数较为接近；CFX所得升力系数要比耦合算法的小0.5%，

阻力系数小2%左右。若认为CFX所的结果为精确解，则耦合算法的计算精度要高于面元法：耦合算法和面元法都高估了升力系数和阻力系数，而耦合算法所得升力系数的误差要小一些。

4.3.2 对流场涡量分布的影响分析

本节分别分析了涡粒子重分布起始位置、涡粒子密度和涡粒子重分布频率对流场涡量分布的影响，并通过对比面元-涡粒子耦合算法和CFX计算所得的流场涡量分布，对所得耦合算法进行了验证。

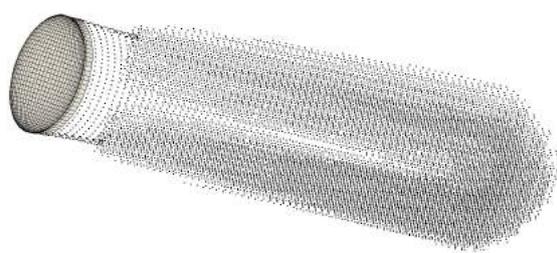
(1) 涡粒子重分布起始位置的影响

本部分中通过分析配置1~4计算所得的尾流场来研究耦合算法中涡粒子重分布起始位置对计算结果的影响。如表4-1中所示，四种配置的涡粒子重分布的起始位置分别选在 $x_{rds}=1m$ ， $x_{rds}=2m$ ， $x_{rds}=4m$ 和 $x_{rds}=\infty$ ，其他设置完全一样。四种配置下，数值计算所得的 $t = 7s$ 时刻的梢涡强度等值面如图4-12所示。从图中可以看出，在涡粒子重分布的临界处，涡结构发生了突变，梢涡中心处涡强突然下降。而重分布区域和非重分布区域中的涡强耗散都很缓慢。同时可以观察到，不同重分布起始位置的计算所产生的重分布区域中的涡强差别并不明显，如图4-13所示的 $x_{rds} = 1m$ 和 $x_{rds} = 2m$ 两种模拟在 $x = 3.5m$ 处垂直截面上的涡强分布。

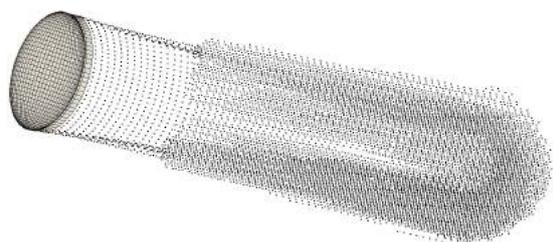
对比消失的涡强等值面的尺度和重分布临界位置两边的涡粒子间距，可以发现涡强的突变是由涡粒子密度的突变引起的，重分布临界位置之前的涡粒子密度由面元分布决定，在翼梢处密集。重分布后，涡粒子是均匀分布的，在翼梢处并不密集，而丢失的高强度涡等值面，其尺度小于涡粒子间距，不能被捕捉到。图4-14中所给出了 $x_{rds} = 2m$ 的模拟中重分布临界位置前后 ($x = 1.8m$ 和 $x = 2.2m$) 两截面上的涡量强度分布和涡粒子分布，证实了上述结论。当涡粒子密度加密以后，该突变问题会得到一定程度的解决。

(2) 涡粒子密度的影响

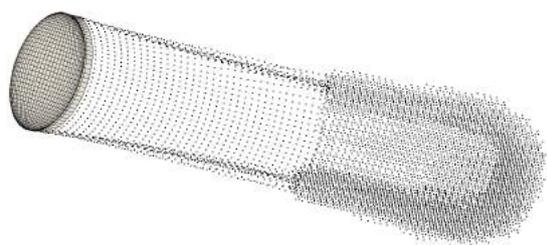
本部分通过分析配置4和配置5计算所得的结果来研究涡粒子密度对计算所得尾流场的影响。两种配置中，单个尾涡面元分别被转化为 1×1 和 2×2 个涡粒子，对应的涡粒子间距分别为 $0.1m$ 和 $0.05m$ ，计算过程中不进行涡粒子重分布。计算所得梢涡结构如图4-15所示，从图中可以观察到，涡粒子分布越密，则计算所得的梢涡强度越大。根据涡粒子法的理论，流场的涡强不应该受涡粒子密度的影响，计算结果所显示的涡量强度随涡粒子密度的变化，似乎并不合理。然而，这是耦合算法所特有的属性，原因是无厚度的尾涡面元只转化成了一层涡粒子，涡粒子的核半径决定了具有涡量分布的粘流区域的厚度。较大的涡粒子密度意味着较小的涡粒子间距，从而产生较小的涡粒子核半径，因此尾涡面元上同样的涡量便分布在更薄的区域内，导致所得的涡量强度更大。所以，耦合算法中涡粒子的核半径并不能随意确定，而应该准确模拟升力体尾涡粘流区域的厚度。



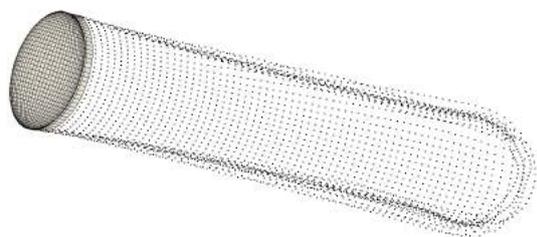
(a) $x_{rds} = 1m$



(b) $x_{rds} = 2m$

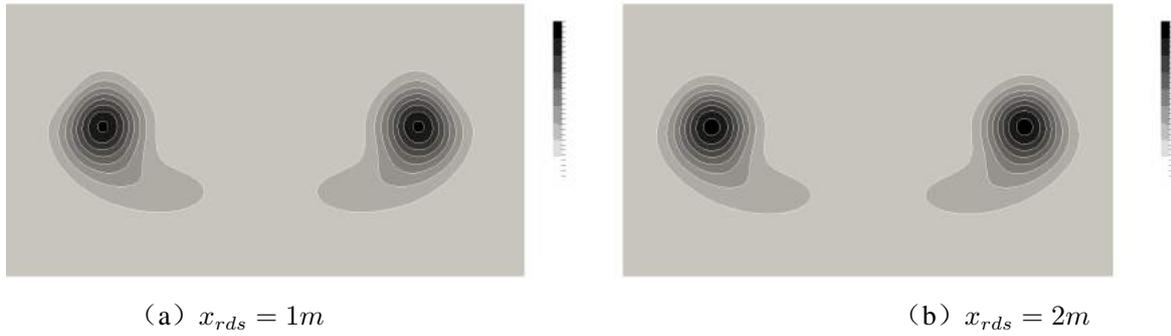
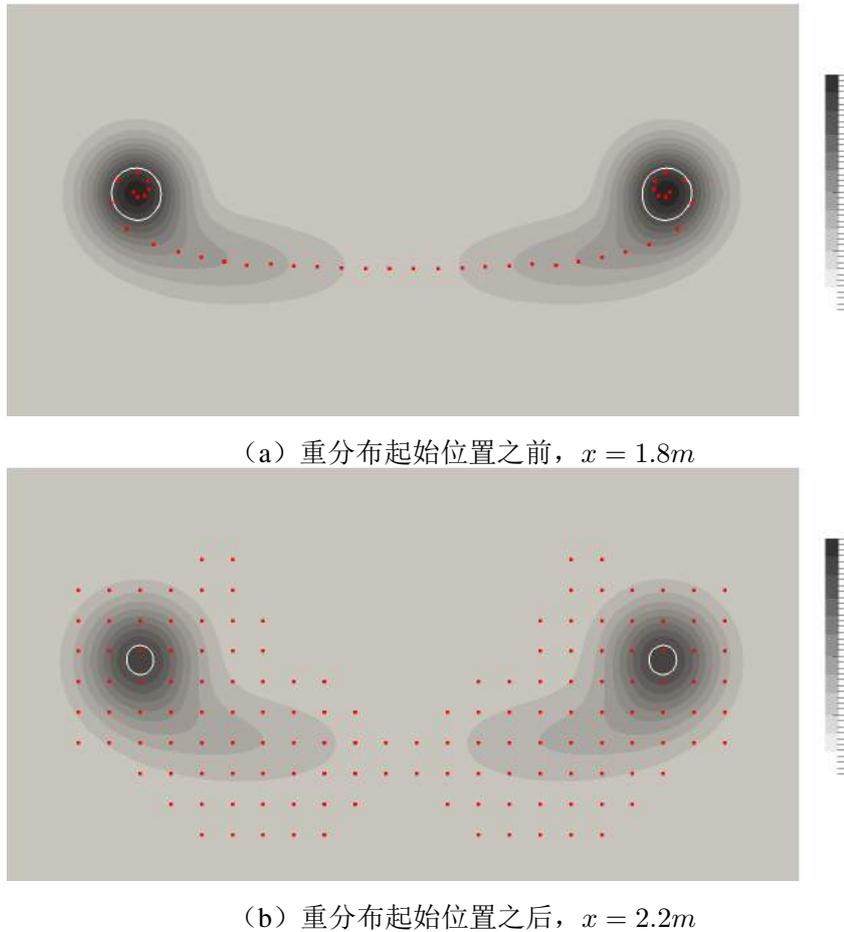


(c) $x_{rds} = 4m$



(d) $x_{rds} = \infty$

图 4-12 不同涡粒子重分布起始位置所得的涡粒子分布与涡强等值面（等值面对应涡量强度为 $|\omega|=1.0, 1.5$ 和 2.0 ）

图 4-13 $x = 3.5m$ 处截面上的涡强分布图 4-14 $x_{rds}=2m$ 算例中涡粒子重分布起始位置之前和之后的截面涡强分布与涡粒子位置 (图中白色等值线对应 $|\omega| = 1.8$)

假设从尾涡面元到涡粒子转化的位置处粘流区域的厚度等于升力体随边处的边界层厚度, 取涡的核半径等于此厚度。随边处边界层厚度根据 Schlichting 的平板边界层厚度经验公式计算得到[121], 即:

$$\delta = 0.154\text{Re}^{-\frac{1}{7}}C \quad (4-17)$$

式中, δ 为边界层厚度, Re 为雷诺数, C 为特征长度 (取椭圆翼的最大弦长)。对于本节中的算例, 采用椭圆翼最大弦长和未受扰动的流场速度来计算雷诺数, 得到 $\delta = 0.0214m$, 对应于一个尾涡面元转化为 5×5 个涡粒子, 表4-1中的配置6~8的涡粒子密度

正是依据此结果进行设定的。



图 4-15 不同涡粒子密度所得的椭圆翼梢涡涡强等值面（等值面对应涡量强度为 $|\omega|=2.0, 4.0$ 和 6.0 ）

（3）涡粒子重分布频率的影响

虽然在前面的分析中观察到涡粒子重分布会导致涡强和涡结构的突变，但是在一些计算中，为满足重叠条件，涡粒子重分布过程是必不可少的。在数值计算过程中，我们观察到，当一个尾涡面元转化为 5×5 个涡粒子进行计算时，若不进行涡粒子重分布（即配置6），计算会在 50 步之前发生异常并不收敛。

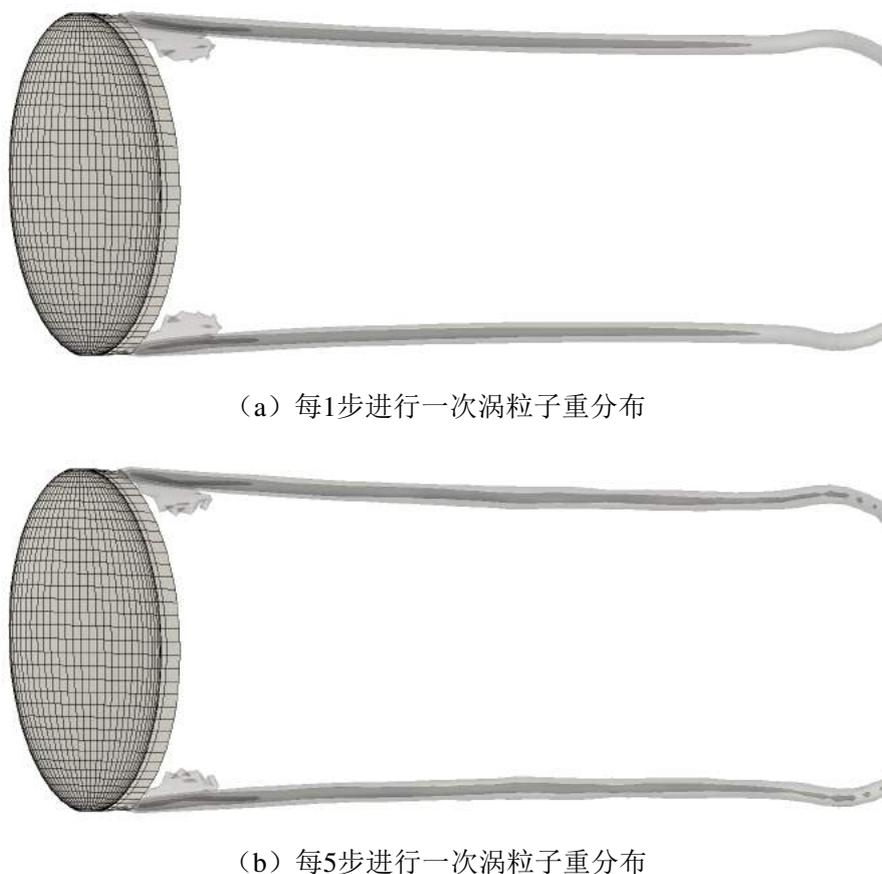
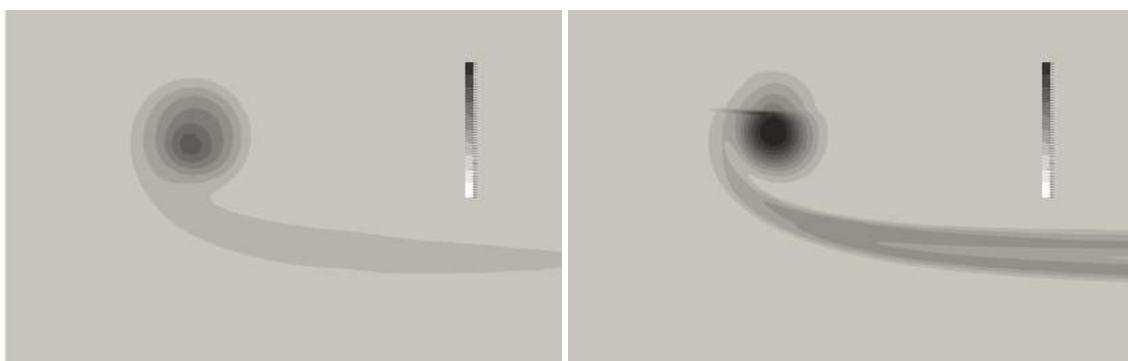


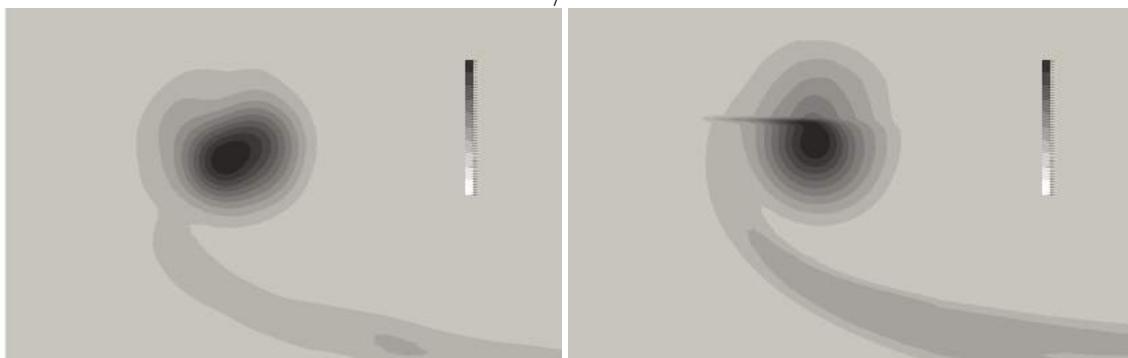
图 4-16 不同涡粒子重分布频率所得的涡强等值面（等值面对应涡量强度为 $|\omega|=5.0, 10.0$ 和 15.0 ）



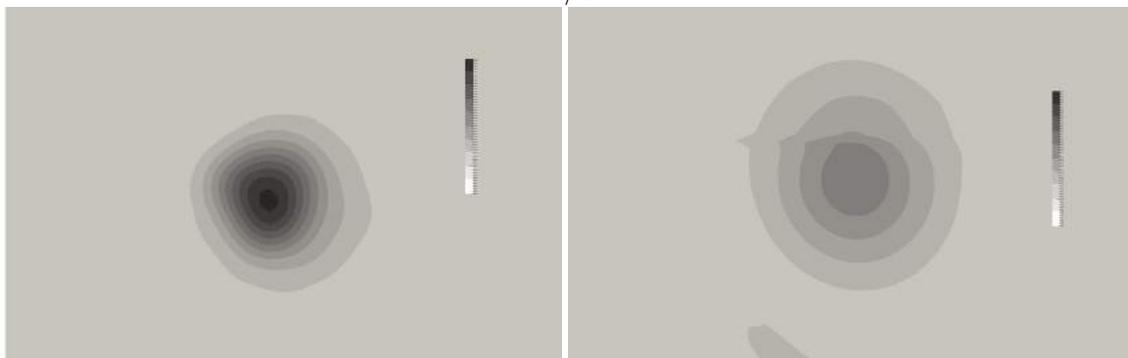
图 4-17 CFX计算所得的梢涡涡强等值面（等值面对应涡量强度为 $|\omega|=5.0, 10.0$ 和 15.0 ）



(a) $x/C = 0.9$



(b) $x/C = 2$



(c) $x/C = 4$

图 4-18 椭圆水翼后方截面上的涡强分布对比（左侧为耦合算法结果，右侧为CFX计算结果；（a）中涡强范围为 $0 \sim 25 s^{-1}$ ，（b）和（c）中涡强范围为 $0 \sim 12.5 s^{-1}$ ）

考虑到采用不同的涡粒子重分布频率时，计算结果会有所不同，本部分通过分析配置7和配置8的计算结果来研究不同涡粒子重分布频率对尾流场的影响。两种配置中，一个尾涡面元转化为 5×5 个涡粒子，重分布起始位置选择在 $x_{rds} = 1\text{m}$ ，涡粒子重分布的频率分别为每1步进行一次和每5步进行一次。计算所得的梢涡涡强等值面如图4-16所示。可以看出，当每5步进行一次涡粒子重分布时，涡强的耗散更缓慢，即高频的涡粒子重分布具有使涡强耗散的副作用，但是涡强差距并不大。此外，每5步进行一次重分布时，流场的光滑性受到了影响，梢涡的轨迹出现了振动。所以，每1步进行一次重分布时，耦合算法所得的结果更加合理，也更有利于保证数值计算的稳定性。

(4) 与CFX计算结果的对比

使用 CFX 计算所得的涡强等值面如图4-17所示，将其与图4-16 (a) 相对比可以发现：CFX所得结果在随边附近强度更大，但是耗散很快，到图中所示下游时，强度已经小于耦合算法的结果。图4-18给出了三个不同位置处的涡强分布图，进一步证实了上述观察。在 $x/C = 0.9$ 位置处，CFX 计算所得的梢涡强度明显大于耦合算法所得结果；到了 $x/C = 2$ 位置处时，由于耗散作用，两种方法所得的梢涡强度已基本相同；再向下游到 $x/C = 4$ 位置处时，耦合算法所得的梢涡强度基本和 $x/C = 2$ 位置处的梢涡强度相同，而 CFX 所得结果已经明显小于耦合算法所得结果。综上，可以得出以下结论：现有耦合算法低估了翼梢生成的涡强，但在维持涡强方面的表现明显优于 CFX。

此外，在图4-18中还可以观察到，CFX结果中的涡强分布在梢涡中心上方具有一个明显的波动，这是由计算网格在该处的扭曲和尺寸变化所引起的。上述观察说明，RANS的计算结果对计算网格具有较高的依赖性，而高质量计算网格的获得需计算人员对流场特性具有充分的了解。相比之下，面元-涡粒子耦合算法中的涡粒子分布自动产生，且得到了光滑的涡强分布。

4.4 本章小结

本章使用二维插值算法在低阶面元上重构了连续分布的偶极子强度，提出了一对多的低阶面元-涡粒子转化算法，并基于此提出了自适应确定单个尾涡面元对应涡粒子数量的方法。此外，给出了面元-涡粒子耦合算法的流程，并将涡粒子区域划分为重分布区域和非重分布区域，提出了专用于耦合算法的涡粒子重分布过程。

通过计算实例，分析了各种参数对计算结果的影响，并得出结论：涡粒子重分布区域起始位置、涡粒子间距以及涡粒子重分布频率对水动力性能的影响都较小，不同设置所引起的水动力性能差异在1%以内；不同的涡粒子核半径尺寸（与涡粒子间距成正比）计算所得的尾流涡强分布差距很大，较小的涡粒子核半径会产生较大的涡强。

本章所得算法和结论为第5章开发用于螺旋桨水动力性能及流场分析的面元-涡粒子耦合算法提供了基础。

第5章 考虑旋转周期性边界的螺旋桨面元-涡粒子耦合算法研究

在第4章所得面元-涡粒子耦合算法的基础上，本章针对螺旋桨流场的旋转周期性，在面元-涡粒子耦合算法中加入对旋转周期性边界条件的考虑，并对涡粒子重分布过程和快速多极子算法进行相关改进，以提高对螺旋桨流场分析的计算效率和计算精度。分析螺旋桨的耦合算法中的计算元素分布如图5-1所示。

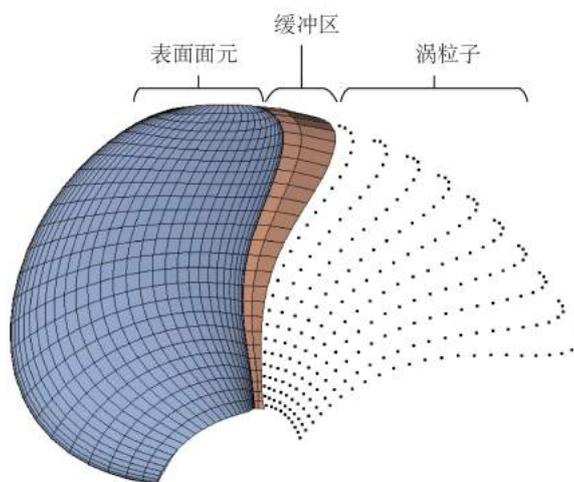


图 5-1 针对螺旋桨的耦合算法中的计算元素分布

5.1 耦合算法中的旋转周期性边界条件

假设螺旋桨在敞水工作状态下产生的流场具有旋转周期性，即若将建模为圆柱区域的流场沿周向按螺旋桨叶片数量等分成扇形柱体区域后，每个扇形柱体区域内的流场是相同的（旋转对称）。这种假设在忽略流场随机湍流的前提下是合理的。基于以上假设，在对螺旋桨进行敞水分析时，为节约计算资源，使得数值模拟可行，在面元-涡粒子耦合算法中引入旋转周期性边界条件，如图5-2所示。在计算中，只模拟对应于一个螺旋桨叶片的扇形柱体计算域，而认为其他流体区域内的流场情况与该计算域中相同，扇形柱体的两侧设置为旋转周期性边界条件。

记两个周期性边界分别为A和B，由周期性边界条件的特性可知，当有涡随流体经由边界B从计算域流出时，必有对应的涡随流体经由边界A流入计算域，反之亦然。所以，在耦合算法的模拟中，若有涡粒子从一个周期性边界流出，则将其移除并创建对应的新涡粒子从另一个周期性边界流入，新涡粒子的速度和强度由流出涡粒子的速度和强度经旋转运算得到，此过程的示意如图5-3所示。

此外，当对流场中的速度、速度梯度以及涡量强度进行计算时，不只使用扇形柱

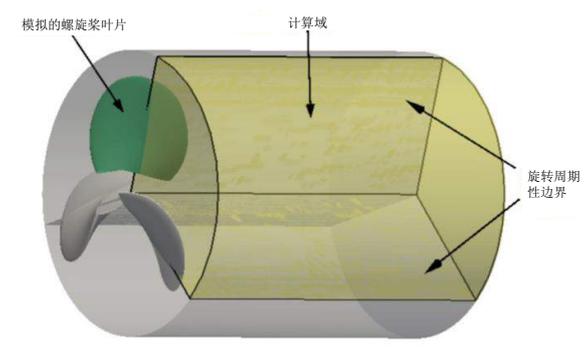


图 5-2 实际模拟的计算域和旋转周期性边界条件

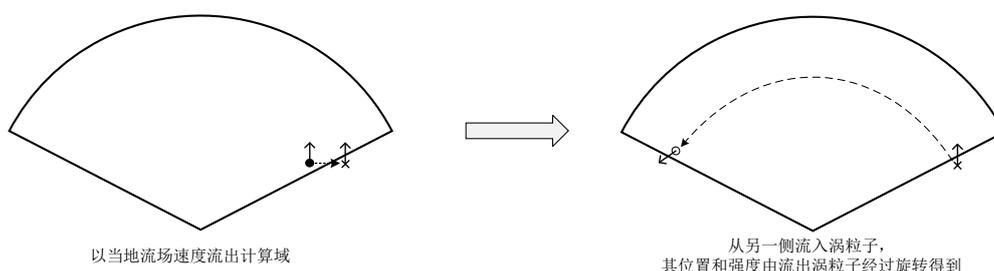


图 5-3 涡粒子穿过周期性边界时的处理过程

体区域内的涡粒子进行计算，而需考虑整个圆柱区域流场中涡的影响。因而，需将被忽略的计算域外的涡粒子进行复原，称其为虚涡粒子，相应地将扇形柱体计算域中的涡粒子称为实涡粒子。计算速度、速度梯度和涡量强度时，叠加所有虚、实涡粒子的贡献，从而得到正确的结果。

5.2 涡粒子重分布过程的改进

考虑旋转周期性边界后，涡粒子法对应的计算域为一个有界的扇形柱体区域。特殊的计算域形状导致涡粒子重分布过程中，新涡粒子的均匀分布和涡粒子强度插值都需要进行特殊的处理和改进。本节首先描述不同方面的改进，并在最后对改进后的涡粒子重分布流程进行总结。

5.2.1 扇形计算域中涡粒子的均匀分布

涡粒子重分布过程中，在使用统一涡粒子核半径的前提下，为减少涡粒子数量，需要在计算域中布置均匀分布的新涡粒子。重分布中涡粒子密度一般由涡粒子间距 h 控制，需在计算域中生成均匀分布的边长约为 h 的六面体单元，并将其中心作为布置新涡粒子的位置。为适应旋转周期性边界条件，六面体单元应正好填满一个扇形柱体区域。

考虑到扇形区域的特性，在划分六面体单元时采用柱坐标系，记轴向坐标为 x ，径向坐标为 r ，周向坐标为 θ 。轴向和径向均使用间隔为 h 的均匀分布网格；在周向方向

上，依据 h 和对应弦长将每一个等半径的条带区域等分成 N_θ 个网格，使得周向弧线长度约为 h ，即

$$N_{\theta,i} = \left\lceil \frac{r_i \theta_{sec}}{h} \right\rceil \quad (5-1)$$

式中 i 为当前等半径条带区域的编号， r_i 为当前条带区域的半径中值， θ_{sec} 为计算域的圆心角， $\lceil \cdot \rceil$ 为向上取整函数。所得扇形横截面上的网格分布如图5-4所示。如此所得的六面体单元的体积（即对应的新涡粒子的体积）为

$$V_i = r_i h^2 \frac{\theta_{sec}}{N_{\theta,i}} \quad (5-2)$$

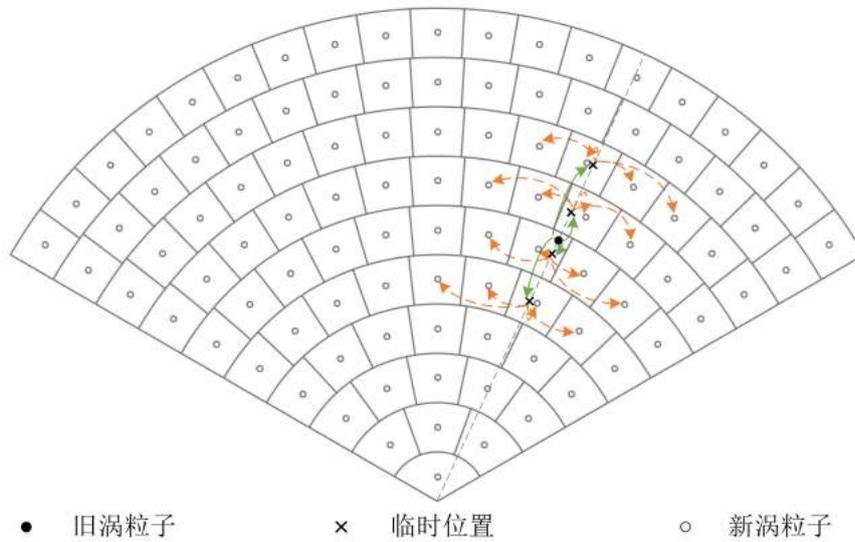


图 5-4 计算域网格分布与涡粒子重分布过程示意图

5.2.2 涡粒子强度的多方向分步插值

由于新涡粒子位置定义在柱坐标系中，因而，在对涡粒子强度进行插值的过程中，不能再使用原始的笛卡尔坐标系，而须使用映射坐标系（即柱坐标系）作为插值函数的自变量。则三维插值函数为：

$$W\left(\frac{\mathbf{x}_p - \tilde{\mathbf{x}}_q}{h}\right) = W_x\left(\frac{x_p - \tilde{x}_q}{h}\right) \times W_r\left(\frac{r_p - \tilde{r}_q}{h}\right) \times W_\theta\left(\frac{\theta_p - \tilde{\theta}_q}{\Delta\theta}\right) \quad (5-3)$$

式中 W_x ， W_r 和 W_θ 都取 M'_4 函数， $\Delta\theta$ 为周向网格长度。从5.2.1小节的论述可以得知，不同半径处的周向间隔 $\Delta\theta$ 是不同的，由式（5-3）中的笛卡尔乘积所得三维插值函数并不能按式（3-22）直接使用。所以，在针对螺旋桨的耦合算法中进行涡粒子重分布时，对涡粒子强度的插值分两步实施：第一步，在以旧涡粒子的轴向坐标 $\tilde{\theta}_q$ 确定的 $x-r$ 平面上，使用 W_x 和 W_r 进行笛卡尔乘积所得的二维插值函数，将旧涡粒子的强度在轴向和径向上插值到不同的 $(x_p, r_p, \tilde{\theta}_q)$ 临时位置处， x_p, r_p 都位于间隔为 h 的网格中心处；第二步，对于每一个 $(x_p, r_p, \tilde{\theta}_q)$ 位置，在由 (x_p, r_p) 确定的弧线上使用一维插

值函数 W_θ 将所得涡强插值到不同的 (x_p, r_p, θ_p) 位置上, 而 (x_p, r_p, θ_p) 即为新涡粒子所在位置。上述的插值过程如图5-4所示。

5.2.3 计算域边界处的涡粒子强度插值

考虑到周期性边界条件, 计算域侧面边界附近的涡粒子强度插值需要进行特殊处理。本小节以扇形区域左侧周期性边界为例, 对周期性边界处的涡粒子强度插值过程进行描述。

如图5-5所示, 插值之前, 首先在左边界外侧设置两层假想涡粒子, 其经过旋转后正好对应于右边界内侧的两层涡粒子。对强度进行插值时, 使用5.2.2小节的分步插值算法, 左侧边界附近旧涡粒子的强度将被插值到假想涡粒子上。然后, 对假想涡粒子的强度进行旋转变换, 即

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{sec}) & -\sin(\theta_{sec}) \\ 0 & \sin(\theta_{sec}) & \cos(\theta_{sec}) \end{bmatrix} \alpha_{img} \quad (5-4)$$

式中 α_{img} 为假想涡粒子的强度, α 为旋转后所得涡粒子强度。最后, 将经旋转所得的强度加到与假想涡粒子相对应的右边界内侧的涡粒子强度上。右侧边界处的涡粒子强度插值过程同理可得。如此所得的流场在周期性边界处具有很好的连续性。

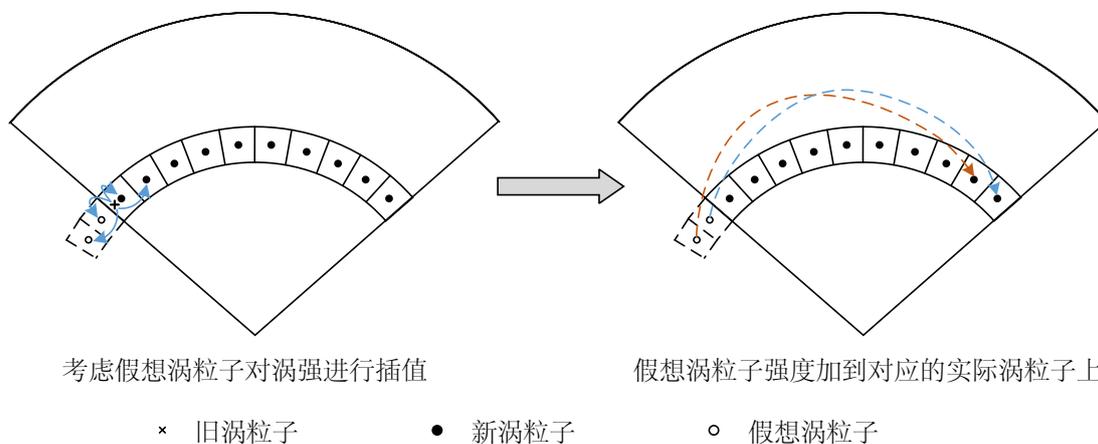


图 5-5 周期性边界附近涡粒子强度插值过程

在径向的插值中, $r = 0$ 位置处使用虚拟的对称边界条件来处理。涡粒子强度首先被插值到 $r < 0$ 的位置上, 然后将所得强度加到半径为 $|r|$ 的位置上。

5.2.4 涡粒子重分布流程总结

根据上述的改进, 具有旋转周期性边界条件的扇形柱体计算域内的涡粒子重分布流程可总结如下:

1. 设定涡粒子重分布起始位置 x_{rds} 与涡粒子间距 h ，确定扇形柱体区域周向坐标范围 θ_{low} 和 θ_{up} ；
2. 遍历所有涡粒子，确定涡粒子在空间的分布范围，即涡粒子轴向位置和径向位置的最值 x_{min} 、 x_{max} 、 r_{min} 和 r_{max} ；
3. 依据旧涡粒子的分布范围确定重分布后新涡粒子的分布范围，即

$$x_{low} = \left(\lfloor \frac{\max(x_{rds}, x_{min})}{h} \rfloor - 2 \right) h \quad (5-5)$$

$$x_{up} = \left(\lceil \frac{x_{max}}{h} \rceil + 2 \right) h \quad (5-6)$$

$$r_{low} = \max \left[0, \left(\lfloor \frac{r_{min}}{h} \rfloor - 2 \right) h \right] \quad (5-7)$$

$$r_{up} = \left(\lceil \frac{r_{max}}{h} \rceil + 2 \right) h \quad (5-8)$$

式中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 和 $\lceil \cdot \rceil$ 分别为向下和向上取整运算。然后，根据涡粒子间距 h ，在柱坐标系内将区域 $[x_{low}, x_{up}] \times [r_{low}, r_{up}] \times [\theta_{low}, \theta_{up}]$ 等分为边长约为 h 的六面体单元，并以六面体单元的中心作为布置新涡粒子的位置；

4. 定义容量为 $N_{cell} \times 3$ 的数组 a_{new} 来记录新涡粒子的强度，其中 N_{cell} 为六面体单元总数。将数组 a_{new} 所有单元初始化为零，并建立其行号与六面体中心位置的一一对应关系；
5. 定义类型为涡粒子数据结构的空链表 $rest$ ，用来存放非重分布区域内的涡粒子；
6. 遍历每一个旧的涡粒子，进行位置判断：1) 当其位于非重分布区域内时（即 $x_p < x_{rds}$ ），将其加入链表 $rest$ ；2) 当其位于重分布区域内时（即 $x_p \geq x_{rds}$ ），根据多方向分步插值算法，将其强度插值分布到临近的64个新涡粒子位置上，若旧涡粒子在周期性边界附近，还需使用假想涡粒子和旋转变换运算，若旧涡粒子在对称轴附近，需使用虚拟对称边界条件。然后，将所得新涡粒子强度根据对应关系叠加到对应的 a_{new} 的元素上；
7. 删除所有的旧涡粒子，将 $rest$ 链表中的涡粒子依次加入新涡粒子链表；
8. 遍历数组 a_{new} 的每一行元素，当其表示的涡粒子强度小于强度临界值时，跳过此行元素不进行任何操作；否则以该行元素为强度，以其对应的六面体中心坐标为位置，以式 (5-2) 计算结果为体积，以 $1.2h$ 为核半径创建新涡粒子，并将其加入新涡粒子链表。

5.3 快速多极子算法改进

如5.1节所述，当对流场中的速度和速度梯度进行计算时，需要考虑整个圆柱流场中涡粒子的影响，包括扇形柱体计算域内部的涡粒子（实涡粒子）以及由其旋转所得的其余区域内的涡粒子（虚涡粒子）。为提高计算效率，使用附录A所给出的快速多极子算法（Fast Multipole Method, FMM）对耦合算法中涡粒子间的相互诱导速度进行计算，已有的快速多极子算法会不加区分的计算每一个涡粒子位置处的速度和速度梯度，

而虚涡粒子处的信息是耦合算法计算中所不需要的，直接使用已有的快速多极子算法会导致计算资源的大量浪费。因此，本节针对螺旋桨流场分析中的旋转周期性边界条件，对快速多极子算法进行改进，并通过计算实例分析改进效果。

5.3.1 快速多极子算法改进

快速多极子算法的具体描述在附录A中给出，其基本思想是将流场中的涡粒子按位置划分为若干粒子簇，并基于以下三点通过粒子簇之间的相互影响计算整个流场的涡粒子间的相互影响：

1. 一个粒子簇中的涡粒子对其远场的影响可以用多级子展开式表示，自变量为远场点在该粒子簇局部坐标系中的位置；
2. 远场涡粒子对一个粒子簇中某目标点的影响，可以用局部展开式表示，自变量为目标点在该粒子簇局部坐标系中的位置；
3. 对于距离满足远场条件的一对粒子簇A和B，A的多级子展开式可以转换为B的局部展开式，以此来考虑A粒子簇对B粒子簇的影响。

快速多极子算法的实现主要有以下几个步骤：

1. 根据笛卡尔坐标表示的空间位置，使用八叉数算法将所有涡粒子划分为具有树形结构的粒子簇；
2. 对作为树形结构叶节点的粒子簇，建立其多极子展开式，然后使用多极子展开式的移动和叠加公式，按树形结构逐层向上，建立所有粒子簇的多极子展开式；
3. 按树形结构逐层向下，使用局部展开式的移动公式将父节点的局部展开式转换为子节点的局部展开式；然后，针对父节点中未考虑的且满足远场条件的粒子簇，使用多极子展开式到局部展开式的转换关系，得到其对当前粒子簇影响的局部展开式，与已有局部展开式进行叠加；最终，建立所有粒子簇的局部展开式；
4. 对作为树形结构叶节点的粒子簇，通过展开其局部展开式，并使用直接计算方式计算近场粒子的影响，得到粒子簇内部每个粒子的速度和速度梯度。

需指出的是，在快速多极子算法中，最为耗时的是上述的第3步，即多极子展开式到局部展开式的转换。

为充分利用计算资源，在计算扇形柱体计算域内涡粒子的速度和速度梯度时，每个粒子簇中使用两个涡粒子链表，一个用来存放实涡粒子，一个用来存放虚涡粒子。在建立多极子展开式时，考虑粒子簇内所有虚实粒子的影响；在获得局部展开式的转换步骤中（即第3步），首先判断目标粒子簇中是否存在实涡粒子，若不存在则不进行相关转换运算；在使用局部展开式计算粒子簇内部涡粒子速度和速度梯度的过程中，也只针对其内部的实涡粒子位置进行计算。如图5-6中所示的A、B两个矩形粒子簇，A中只有虚涡粒子，而没有实涡粒子，B中有实涡粒子。则计算中将进行A粒子簇到B

粒子簇的多项式转换，而不会进行 B 到 A 的转换。这种改进的快速多极子算法，可避免大量不必要的计算，达到对计算资源的节约。

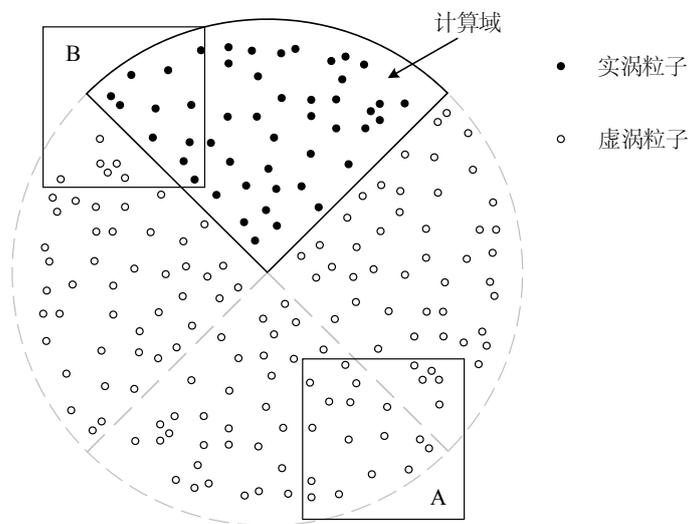


图 5-6 流场速度计算中的虚涡粒子、实涡粒子及粒子簇

5.3.2 效果分析

为验证改进后的快速多极子算法的效果，在具有旋转周期性边界条件的扇形柱体区域内，按5.2节中所述方法布置均匀分布的涡粒子，并分别使用直接计算方法、一般快速多极子算法和改进的快速多极子算法对涡粒子位置处的速度和速度梯度进行计算。扇形柱体区域轴向长度设置为2，半径设置为1，并取三种不同的圆心角 $\theta_{sec} = 120^\circ$ 、 72° 和 $(360/7)^\circ$ ，其分别对应叶片数为3、5、7的螺旋桨尾流场计算域，涡粒子强度的三个分量均取 $[0\sim 1]$ 范围内的均匀分布随机数。

三种圆心角情况下，使用不同方法计算扇形区域内所有涡粒子的速度和速度梯度，消耗的计算时间随涡粒子数量的变化如图5-7所示。从图中可以看出，改进的快速多极子算法的计算效率始终高于传统快速多极子算法，当涡粒子数在10万左右时，改进算法的计算时间大约为传统算法的一半，且效果随计算域圆心角的减小（叶片数的增多）而愈加明显。此外，快速多极子算法对应计算时间的增长速率明显小于直接计算方法：当涡粒子数较少时，二者计算耗时差异并不大，甚至直接计算耗时要更少一些；当涡粒子数不断增多后，快速多极子算法便体现出其优势，计算时间显著少于直接计算方法，当涡粒子数在10万左右时，直接计算方法消耗时间至少是改进快速多极子算法的70倍。

此外，还需说明的是，传统快速多极子算法相当于是对未考虑旋转周期性边界的流场进行速度计算。从本节的结果可以发现，使用旋转周期性边界可使速度场的计算时间减少50%。同时考虑到面元-涡粒子耦合算法中的计算时间主要是由速度场计算过程所消耗的，所以，旋转周期性边界的使用可使面元-涡粒子耦合算法的计算时间减

少50%左右。

5.4 计算实例

本节通过对 PPTC 螺旋桨、P4119 螺旋桨和 P4384 螺旋桨的水动力性能及流场分析，验证所得面元-涡粒子耦合算法的有效性与精确性。

5.4.1 PPTC 螺旋桨计算实例

首先使用所得耦合算法对波茨坦水池实验桨（Potsdam Propeller Test Case, PPTC）进行计算。计算中转速取 $n = 12\text{rps}$ ，涡粒子核半径根据桨叶 $0.7R$ 截面处的随边边界层厚度 $\delta_{0.7}$ 确定，边界层厚度使用 Schlichting 经验公式计算，即

$$\delta_{0.7} = 0.154\text{Re}_{0.7R}^{-\frac{1}{7}}C_{0.7R} \quad (5-9)$$

式中 $C_{0.7R}$ 为螺旋桨 $0.7R$ 截面处的弦长， $\text{Re}_{0.7R}$ 为 $0.7R$ 截面处的局部雷诺数，其定义为：

$$\text{Re}_{0.7R} = \frac{C_{0.7R}\sqrt{v_a^2 + 1.4\pi nR}}{\nu} \quad (5-10)$$

式中 v_a 为螺旋桨前进速度， n 为螺旋桨转速， ν 为流体的动力粘性系数。表 5-1 中列出了不同进速比 J 下的 $0.7R$ 截面处随边边界层厚度，不同的进速比下 $0.7R$ 截面处的随边边界层厚度相差很小，都在 $0.0092D \sim 0.0094D$ 范围内。同时考虑到对计算量的限制，本节计算中涡粒子核半径统一取 $0.011D$ ，涡粒子间距取为 $0.01D$ 。涡粒子重分布起始位置 x_{rds} 取为 $0.4D$ ，计算中的时间步根据使得螺旋桨一次转动 6° 来选取。为节约计算资源，在对螺旋桨的分析中，在每一步中移除距离螺旋桨足够远的涡粒子，临界位置称为截止位置。本节计算中的截止位置（即将涡粒子删除的位置） x_{del} 取为 $1.5D$ 。

表 5-1 不同进速比下的 PPTC 螺旋桨 $0.7R$ 截面上随边处边界层厚度

	0.7R 处总速度	雷诺数 Re	0.7R 处边界层厚度 $\delta_{0.7}$
$J = 0.6$	6.84m/s	7.124×10^5	0.0094D
$J = 0.8$	7.02m/s	7.313×10^5	0.0093D
$J = 1.0$	7.25m/s	7.549×10^5	0.0093D
$J = 1.2$	7.52m/s	7.829×10^5	0.0092D
$J = 1.4$	7.82m/s	8.147×10^5	0.0092D

计算中取第300步所得结果作为最终收敛结果， $J = 1.0$ 时螺旋桨推力系数和扭矩系数的收敛过程如图 5-8 所示，计算过程中和最终的涡粒子分布如图 5-9 所示。在第48步中，可以看到明显的启动涡将梢涡和叶根涡连接在一起，以及启动涡引起的尾流扩散。在300步时，启动涡完全移出计算域，梢涡呈规律的螺旋形状。且在300步时，推力系数和扭矩系数已经达到稳定的收敛，所以认为300步所得结果为收敛结果。

计算得到的 PPTC 螺旋桨的敞水性能如图 5-10 所示，图中同时给出了实验结果和面元法计算所得结果。可以看出，由于耦合算法可以更复合实际地模拟尾流场（对尾

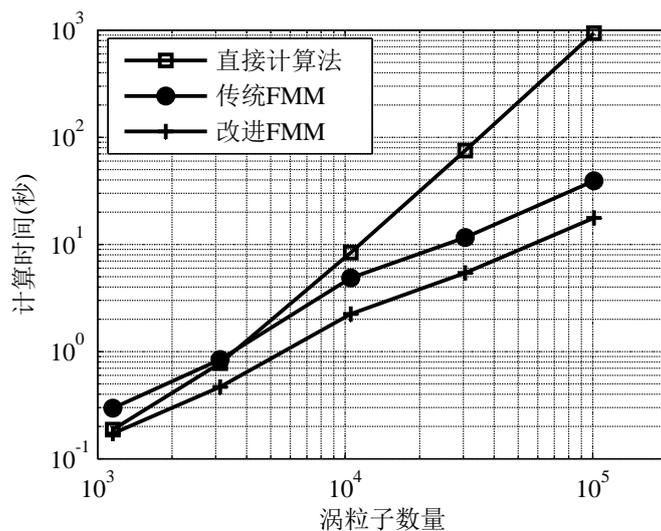
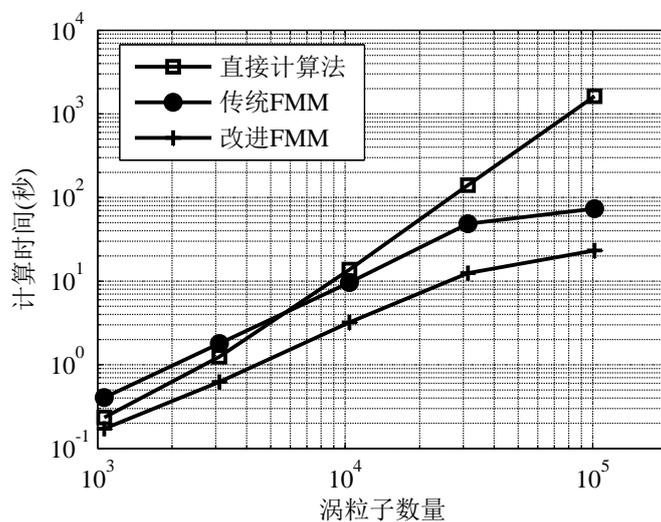
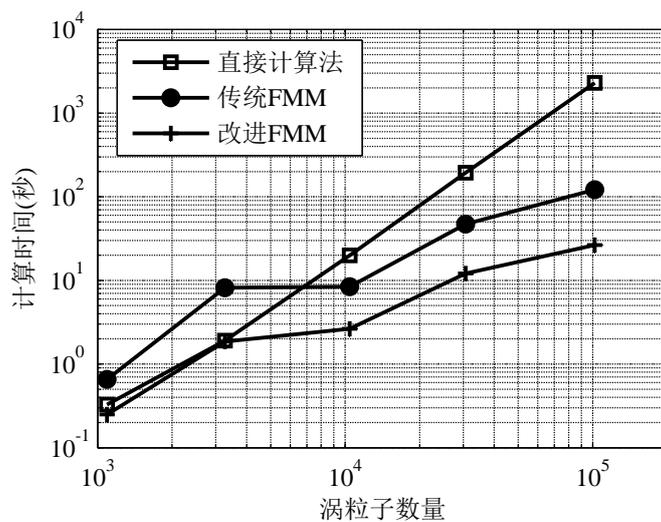
(a) $\theta_{sec} = 120^\circ$ (b) $\theta_{sec} = 72^\circ$ (c) $\theta_{sec} = 360/7^\circ$

图 5-7 不同方法计算扇形区域内速度场的计算时间随涡粒子数量的变化

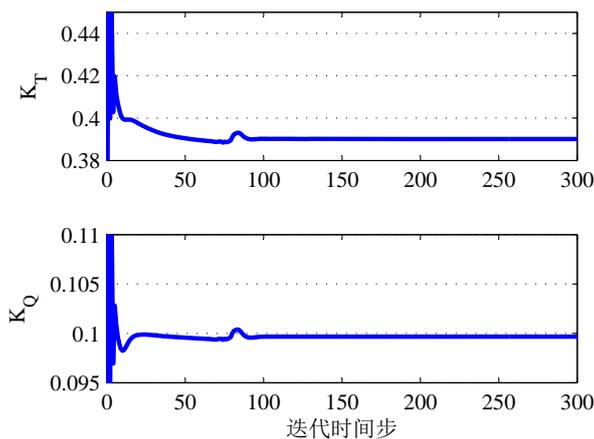


图 5-8 推力系数和扭矩系数的收敛过程

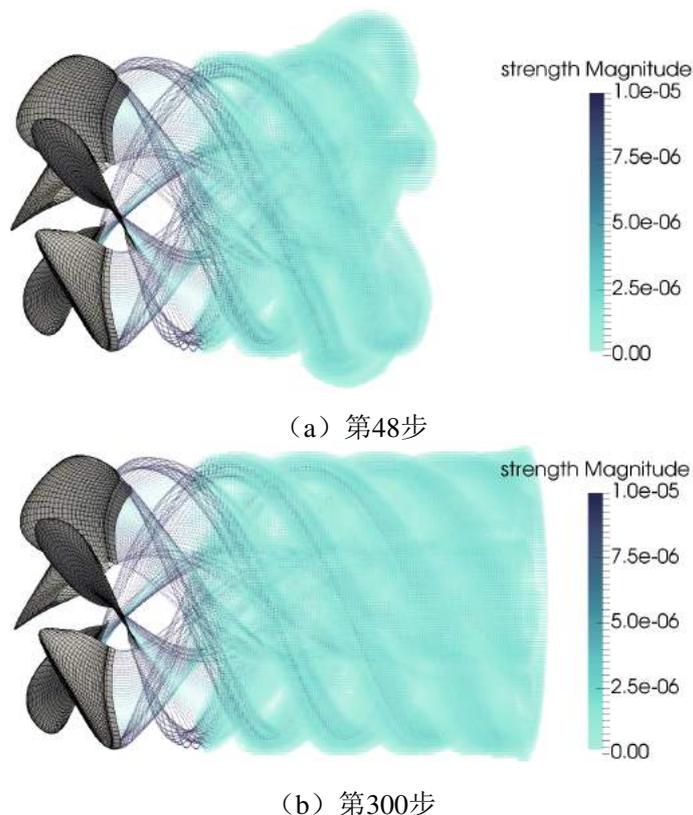


图 5-9 不同时刻的涡粒子分布

涡厚度和粘性扩散的考虑), 其所得的螺旋桨水动力性能要比面元法更加接近实验值, 尤其是在低进速比高负载的情况下。

为分析涡粒子重分布起始位置和计算域截止位置对计算结果的影响, 使用表 5-2 中所列的三种配置对工作于进速比 $J = 1.0$ 的 PPTC 螺旋桨流场进行分析。所得的螺旋桨敞水性能同样列在了表 5-2 中。对比算例 1 和 2 可以看出, 涡粒子重分布起始位置对所得敞水性能基本没有影响, $x_{rds} = 0.4D$ 和 $x_{rds} = 0.15D$ 两种配置所得结果的差异在 0.1% 之内。而计算域的截止位置对所得敞水性能具有更加明显的影响, 对比算例 1 和 3 可以看出, 缩短计算域以后, 预测的推力和扭矩都有所增加, $x_{del} = 1.5D$ 和

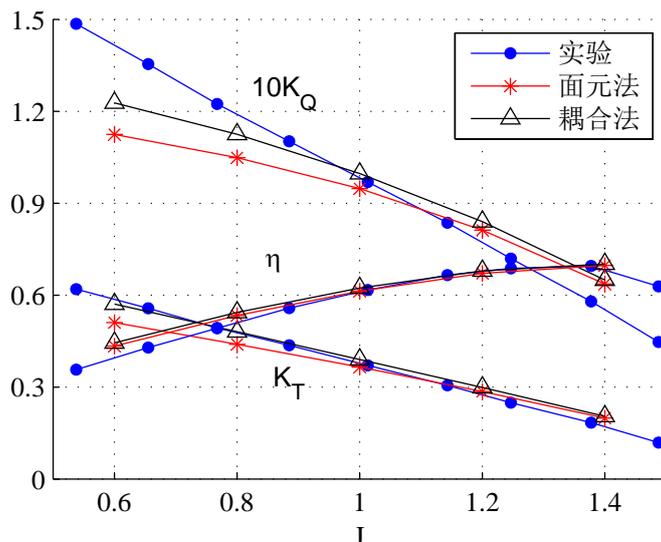


图 5-10 不同方法得到的 PPTC 螺旋桨的敞水性能

表 5-2 不同涡粒子重分布起始位置和计算域截止位置的耦合算法配置

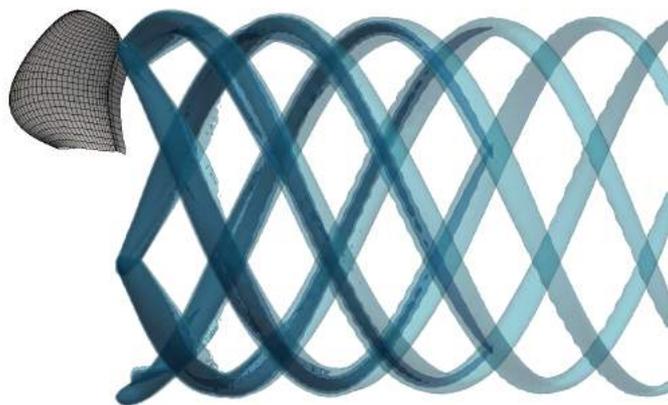
	x_{rds}	x_{del}	K_T	$10K_Q$	η
算例 1	$0.4D$	$1.5D$	0.3902	0.9967	62.3%
算例 2	$0.15D$	$1.5D$	0.3900	0.9965	62.3%
算例 3	$0.4D$	$1.0D$	0.3941	1.0033	62.5%

$x_{del} = 1.0D$ 所得结果之间的误差约为1.0%。三种算例所得尾流场的涡强等值面如图 5-11 所示，虽然涡粒子重分布起始位置对敞水性能影响甚微，对尾流场中尾涡强度的分布却有明显影响，较偏前方的涡粒子重分布起始位置（即较小的 x_{rds} ），导致尾流场中涡强相对变小。计算域长度虽然对敞水性能具有较明显的影响，却基本没有改变尾流场中的尾涡强度分布，只是在计算域的截止位置处切断了涡强等值面，计算域内部的涡强分布变化很小。

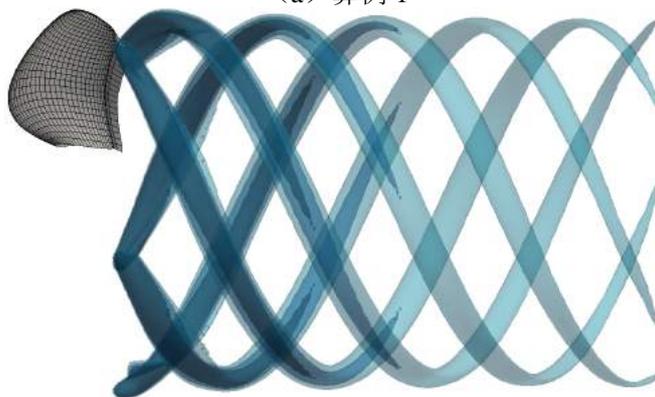
由第4章的分析可以得知，涡粒子间距（核半径）对涡强分布的影响很大，而对最终所得水翼的水动力性能影响很小，为分析在对螺旋桨的计算中，涡粒子间距对水动力性能的影响是否仍不明显，本节使用表 5-3 中所列的三种配置对工作于进速比 $J = 1.0$ 的 PPTC 螺旋桨进行了分析，所得水动力性能同样列在表 5-3中。从结果可以看出，随着涡粒子间距的增大，计算得到的推力和扭矩都有所减小，然而差异很小，

表 5-3 不同涡粒子间距的耦合算法配置

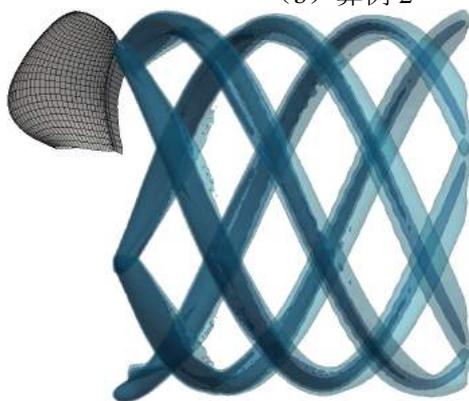
	间距 h	核半径 ε	K_T	$10K_Q$	η	平均单步计算时间
算例 1	$0.01D$	$0.011D$	0.3902	0.9967	62.3%	301s
算例 2	$0.015D$	$0.016D$	0.3895	0.9948	62.3%	55s
算例 3	$0.02D$	$0.021D$	0.3890	0.9937	62.3%	28s



(a) 算例 1



(b) 算例 2



(c) 算例 3

图 5-11 不同算例所得尾流中的涡强等值面（三个级别的等值面分别对应于 $|\omega| = 150s^{-1}$, $200s^{-1}$ 和 $250s^{-1}$ ）

在0.3%以内，可以认为涡粒子间距对面元-涡粒子耦合算法预测得到的螺旋桨水动力性能的影响很小，甚至可以忽略。然而涡粒子间距决定了涡粒子的数量，进而直接影响了计算时间，如表5-3所示，不同涡粒子间距的算例中，平均单步计算时间存在很大的差异，算例1的计算时间是算例3计算时间的10倍多。所以，若只是计算水动力性能，可使用较大的涡粒子间距和涡粒子核半径尺寸。

图 5-12 中给出了实验[129]测得的 $J = 0.9954$ 时 PPTC 螺旋桨的梢涡空化形态，其显示了尾流中梢涡的位置。对比图5-12和图5-11 (a)，可以看出耦合算法预测的梢涡轨

迹和实验观察相互之间对应的很好。文献[133]中使用 LDV 对 $J = 1.253$ 时 PPTC 螺旋桨尾流中的速度场进行了测试，并给出了若干个截面上的测试结果。使用所得耦合算法对同样进速比下（为避免过小的涡粒子间距，减少计算时间，转速任然取 12rps，而不是实验中的 25rps）的 PPTC 螺旋桨流场进行计算，所得螺旋桨盘面后方 $0.2D$ 处截面上的轴向速度分布与实验结果的对比如图 5-13 所示。可以看出，梢涡的位置对应的很好，计算结果中梢涡位置有一点偏向内侧，这是由于在面元法中在桨叶叶梢处切去了 1% 的叶片。计算得到的速度分布比实验结果要光滑很多，梯度较小，说明数值计算中的梢涡尺寸偏大，不够集中。若要得到更精确的结果，需使用更加稠密的涡粒子分布，对计算资源要求较高，由于硬件和时间限制，没有进行进一步的计算。



图 5-12 实验测得的 PPTC 螺旋桨梢涡空化形态（摘自[129]）

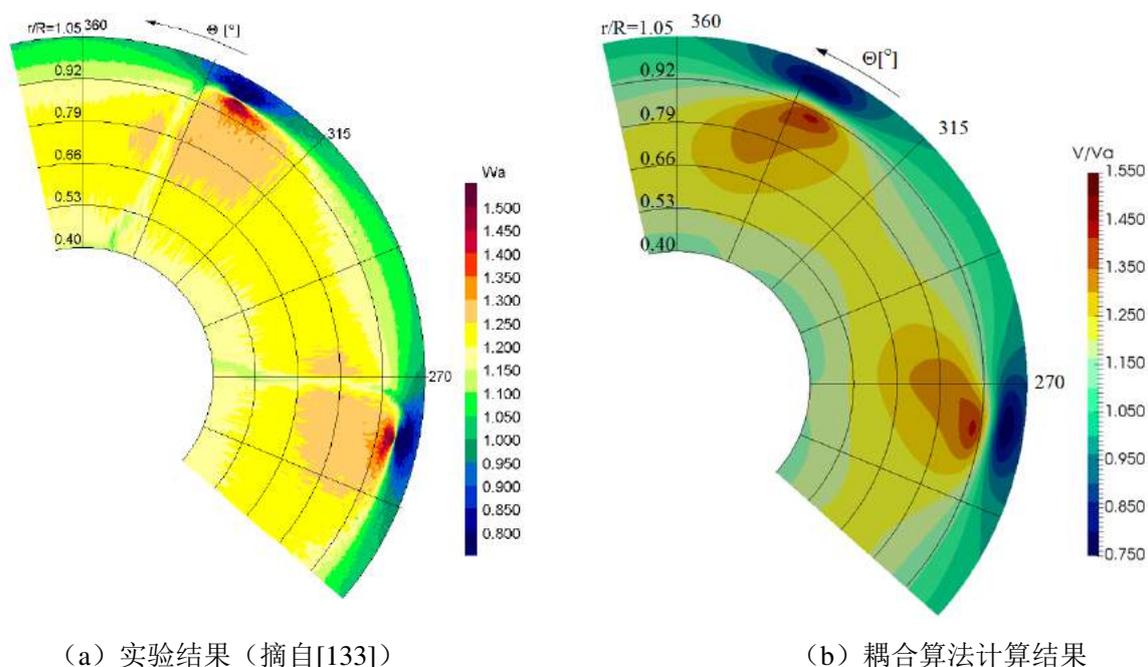


图 5-13 PPTC 螺旋桨 $J = 1.253$ 工况下盘面后方 $0.2D$ 处截面上的轴向速度分布

此外，使用 RANSE 求解器 CFX 对 PPTC 螺旋桨在 $J = 1.0$ 工况下的流场进行分析

计算，计算中同样使用周期性边界条件。计算域被划分为螺旋桨周围的内部旋转域和其外部的静止域，并采用多重参考坐标系的方法考虑螺旋桨的旋转运动。旋转域和静止域中分别使用了80万和52万的六面体网格，计算过程中使用SST湍流模型。CFX和当前耦合算法所得尾流场中涡强分布如图5-14所示。从图中可以看出，在梢涡起始阶段，当前耦合算法所得的梢涡等值面比CFX所得等值面要细一些，说明耦合算法所得涡强绝对值小于CFX所得结果，这是由于当前使用的涡粒子密度仍然偏大所导致的。然而，耦合算法中的梢涡等值面变细的速度要明显慢很多，说明其涡强耗散明显比CFX缓慢，可使涡结构在流场中维持更长的时间。此外，CFX计算所得的涡结构在周期性边界处存在不连续性，而在同样使用周期性边界条件的耦合算法中，涡强等值面光滑连续，更有利于涡结构的准确模拟。值得指出的是，CFX的计算中需要人为划分计算网格，而耦合算法中的桨叶表面面元和尾涡流场的涡粒子分布都是自动生成的，不需要前期准备工作，简化了螺旋桨分析的过程。

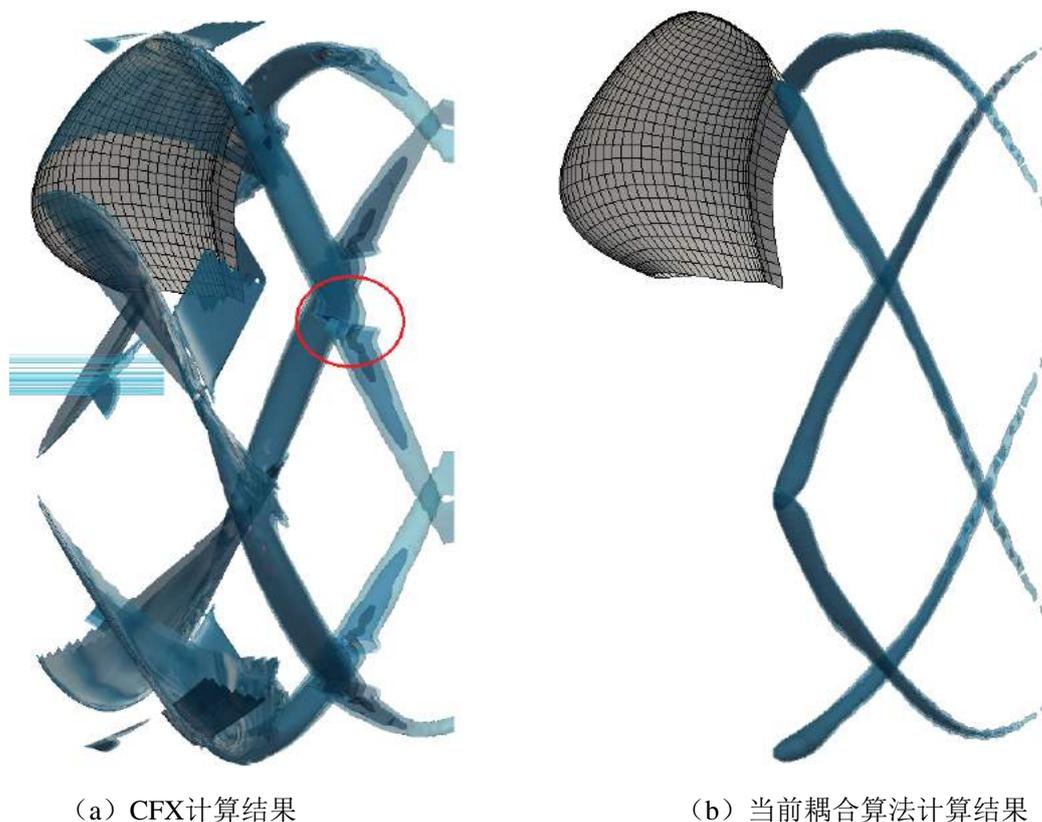


图 5-14 不同方法计算所得的PPTC螺旋桨尾流场涡强分布（三个级别的等值面分别对应于 $|\omega| = 500\text{s}^{-1}$, 550s^{-1} 和 600s^{-1} ）

5.4.2 P4119 螺旋桨计算实例

文献 [123] 中给出了有关 P4119 螺旋桨水动力性能和尾流场的实验测试数据，本小节使用所得面元-涡粒子耦合算法对 P4119 螺旋桨进行水动力性能和尾流场的分析，并与实验结果进行对比。当转速取为 $n = 12\text{rps}$ 时，可计算出 $0.7R$ 处的边界层厚度约

为 $0.1D$ ，据此设置涡粒子核半径为 $\varepsilon = 0.1D$ ，涡粒子间距为 $h = 0.09D$ ，计算域截止位置为 $1.0D$ ，螺旋桨将单步旋转 6° 。

计算所得敞水性能与实验结果和面元法计算结果的对比如图5-15所示。从图中可以

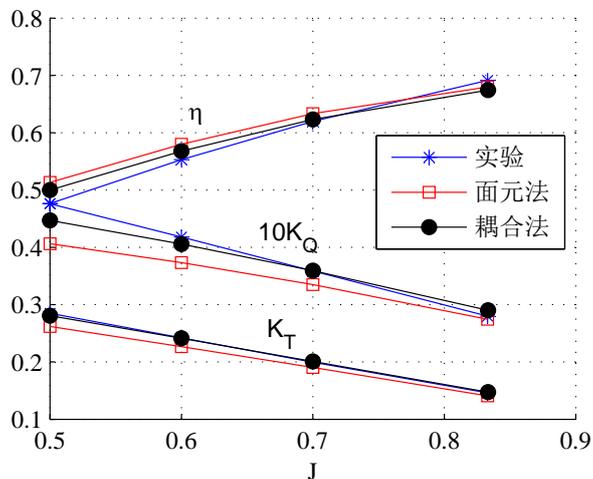
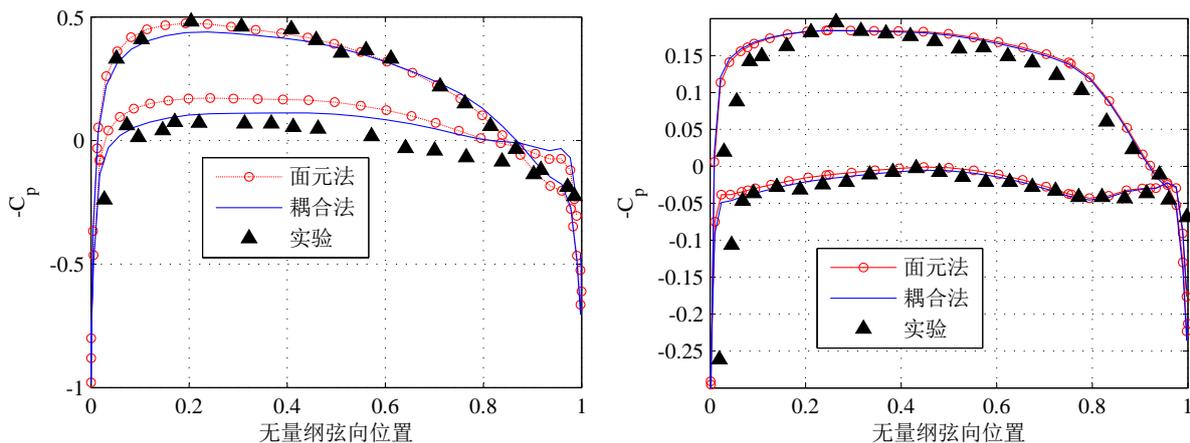
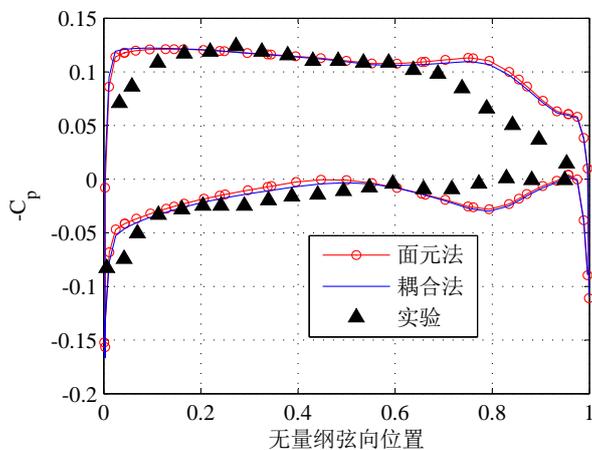


图 5-15 不同方法得到的 P4119 螺旋桨的敞水性能



(a) $0.3R$ 截面处

(b) $0.7R$ 截面处



(c) $0.9R$ 截面处

图 5-16 不同方法得到的 P4119 螺旋桨的桨叶表面压力分布

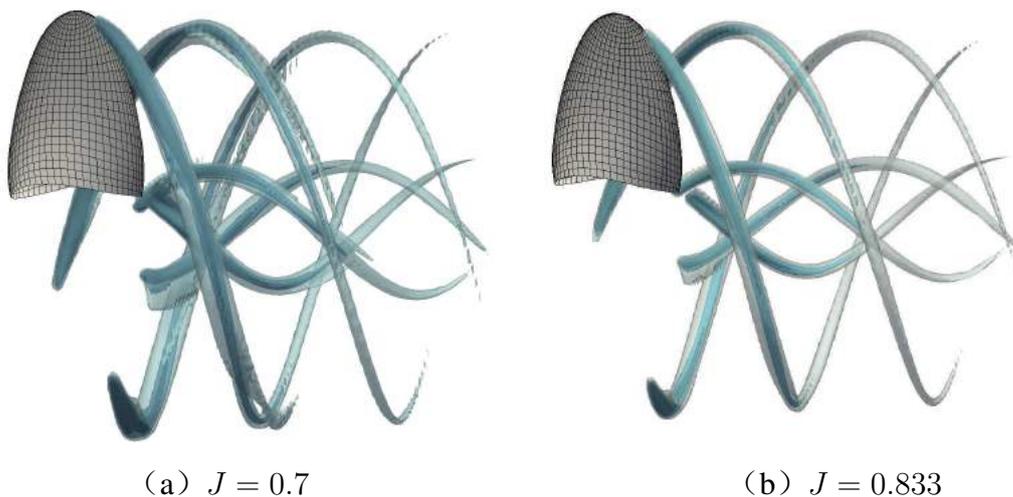


图 5-17 面元-涡粒子耦合算法计算所得P4119螺旋桨尾涡场涡强分布（三个级别的等值面分别对应于 $|\omega| = 200s^{-1}$, $300s^{-1}$ 和 $400s^{-1}$ ）

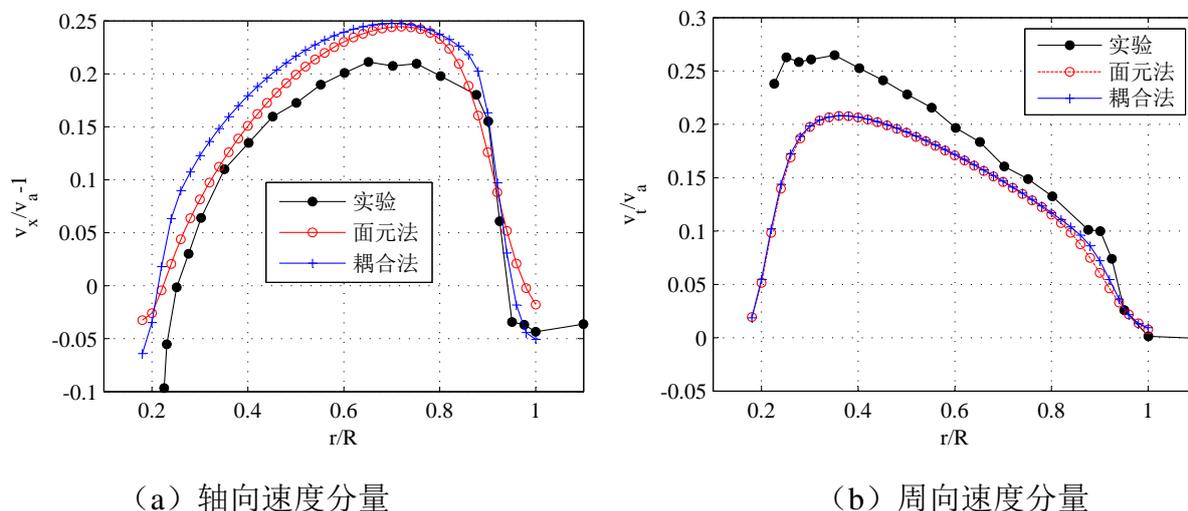


图 5-18 不同方法所得P4119螺旋桨盘面后方 $x/R = -0.3281$ 截面上的周向平均速度分布

看出，叶片面元分布一样的情况下，使用涡粒子模拟尾流场提高了水动力性能的预报精度，尤其是对于低进速比重载的工作情况。不同方法所得螺旋桨叶片截面上的压力分布如图5-16所示，从图中可以看出，面元法和耦合算法计算所得的压力分布差异并不大，且耦合算法所得结果要更加接近实验值一些。图5-17中给出了由涡强等值面表示的耦合算法计算所得的P4119螺旋桨的尾流场涡结构。由于粘性耗散和压格子耗散，在耦合算法中，梢涡中的涡强随着梢涡远离叶片而逐渐减弱。而作为对比，在面元法中，粘性被忽略掉，尾涡面上的涡强（一般由面元边界上的环量表示）一直维持不变。这是引起所计算的敞水性能差异的原因之一。

计算所得螺旋桨盘面后方周向平均的无量纲轴向速度和切向速度如图5-18所示。可以看出，流体流经螺旋桨后获得了加速，面元法和耦合算法预测的轴向速度分量都偏大，而所得周向速度分量都偏小。耦合算法在梢涡附近 ($r/R = 0.9$ 附近) 所得结果较面元法更加精确。图5-19中给出了详细的在 $r/R = 0.9$ 处，轴向速度和周向速度随方位

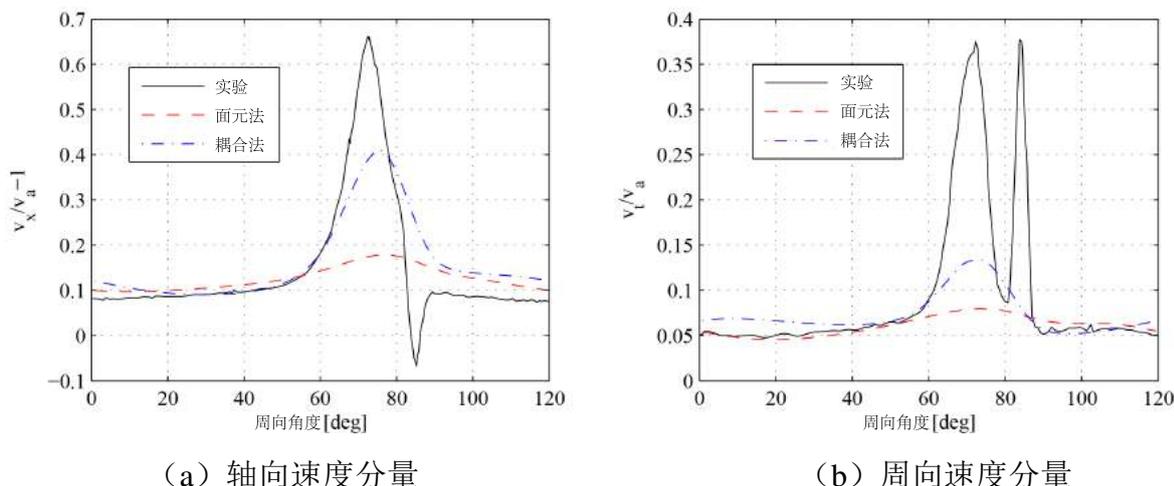
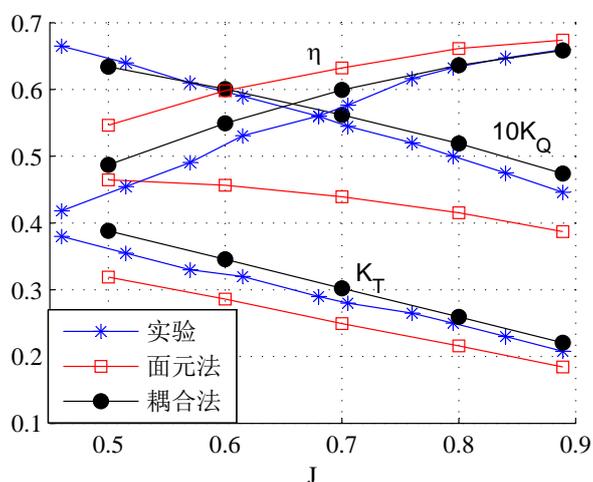
图 5-19 P4119螺旋桨盘面后方由 $x/R = -0.3281$, $r/R = 0.9$ 所定义的弧线上的流场速度分布

图 5-20 不同方法得到的 P4384 螺旋桨的敞水性能

角的变化。可以看出，梢涡大约位于方位角为 70° 的位置，在梢涡附近，由耦合算法所得的结果要明显比面元法的结果更加接近实验测试值。因此，耦合算法可以预测到更加精确的梢涡位置，进而得到更加精确的水动力性能。

5.4.3 P4384 螺旋桨计算实例

本小节使用所得面元-涡粒子耦合算法对具有 108° 侧斜角的大侧斜螺旋桨 P4384 进行了计算。计算中的时间步仍按螺旋桨一次旋转 6° 来进行选取，转速取 $n = 12\text{rps}$ ，涡粒子的间距和核尺寸根据 $0.7R$ 处的边界层厚度决定，计算域截止位置取 $x_{del} = 1.5D$ 。

计算所得的敞水性能与实验结果以及面元法计算结果的对比如图 5-20 所示。从图中可以看出，使用相同的桨叶表面面元分布，面元法计算得到的敞水性能误差较为明显，而耦合算法所得结果的精度要高很多，与实验结果吻合的很好。此例中耦合算法与面元法计算结果差距较大的原因是，P4384 大侧斜螺旋桨中相邻桨叶的导边和随边距离较近，随边处泄出的尾涡和梢涡与临近叶片的距离较小，尾涡结构的不同对叶片上

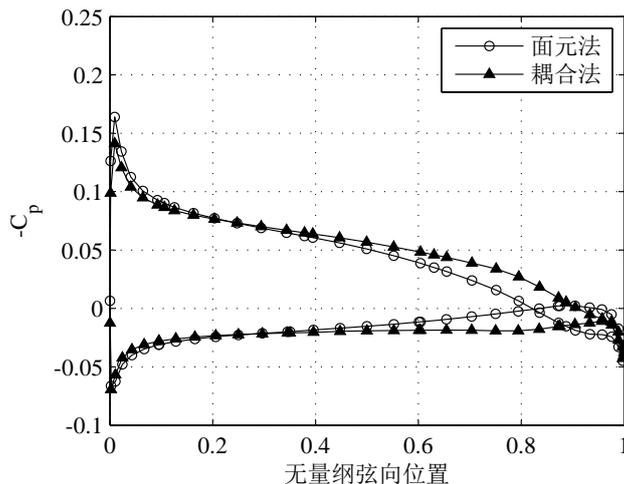


图 5-21 不同方法得到的 P4384 螺旋桨在 $J = 0.7$ 工况下 $0.7R$ 截面处的压力分布

奇点的分布及速度分布会产生较大的影响。图5-21中给出了在 $J = 0.7$ 的情况下，不同方法计算所得桨叶 $0.7R$ 截面处的压力分布。从图中可以看出，不同方法计算得到的压力分布差别明显，耦合法所得结果中桨叶后半部分的负载要更大一些，导致所得推力系数和扭矩系数也相对较大；在导边位置处，面元法所得结果中的负压吸力更大一些，这导致所得扭矩系数偏小。数值计算过程中，导致上述差异的机理较为复杂，当模拟所得的尾涡有所差别时，会导致桨叶表面的源汇强度和偶极子强度产生变化，然后进一步引起尾涡位置和强度的不同，如此相互影响，最终系统达到一个稳定的收敛结果，并产生水动力性能上的差异。

5.5 本章小结

为提高计算效率，本章在面元-涡粒子耦合算法中引入旋转周期性边界条件，并相应地对涡粒子重分布过程和快速多极子算法进行了改进。数值分析结果表明使用旋转周期性边界条件可使得面元-涡粒子耦合算法的计算时间减少50%左右。

通过对多个螺旋桨的尾流场和水动力性能的分析，进行了参数分析并对所得面元-涡粒子耦合算法进行了验证，得到结论：涡粒子重分布区域起始位置和涡粒子间距（或涡粒子密度）对计算所得的水动力性能影响都很小，差异在0.3%以内；在桨叶表面使用相同面元分布的情况下，面元-涡粒子耦合算法所得的水动力性能和流场速度分布比面元法更加精确，尤其是在重载和大侧斜情况下；耦合算法所得的水动力性能和流场细节都与实验吻合的很好。

第 6 章 全文总结和展望

6.1 全文总结

为提高螺旋桨水动力性能和尾流涡场的分析精度，本文提出了用于螺旋桨水动力性能和流场分析的面元-涡粒子耦合算法，针对现有面元法、涡粒子法及面元-涡粒子耦合算法中仍存在的问题，进行了研究和改进，并通过对不同螺旋桨的水动力性能和流场的分析，对所得算法进行了验证。归纳起来，取得的主要成果和结论如下：

(1) 对于面元法，提出了快速压力库塔条件实现算法和自适应可变速度光滑参数模型。建立了求解压力库塔条件中雅可比矩阵的解析方法，并结合提出的偶极子强度增量法建立了快速压力库塔条件实现算法。数值计算结果表明，相比于传统算法，在维持计算结果不变的情况下，解析方法使得雅可比矩阵的计算时间降低了5个量级，压力库塔条件的计算时间基本可以忽略，且增强了压力库塔条件的收敛能力。

基于量纲分析法，在速度光滑参数与尾涡面元年龄之间建立联系，提出了可变速度光滑参数模型，弥补了传统常值速度光滑参数值在上游过大而在下游过小的缺陷；通过拟合，建立了模型中系数的最佳取值与桨叶负载之间的关系，解决了长久以来速度光滑参数确定无依据的问题。

通过对多个螺旋桨的水动力性能分析，得出结论：相比于传统的面元法，改进后的面元法计算效率更高，对尾涡面位置的预测更加精确；对于工作于设计点处或高进速比工况下的常规螺旋桨，面元法所得结果和实验吻合的很好；而在低进速比工况下，或对于大侧斜螺旋桨，面元法所得结果与实验仍有一定差异。

(2) 对比研究了涡粒子法中现有的两种亚格子耗散模型。使用涡粒子法中现有的两种亚格子耗散模型，即 Smagorinsky-Lilly 亚格子耗散模型和 Cottet 人工粘性模型，对经典的双涡环碰撞与再连接过程进行了数值模拟，通过对模拟过程中计算时间、涡结构、最大涡粒子强度以及流场总涡量、冲量、角冲量三个守恒量的变化的分析，得出结论：Cottet 人工粘性模型计算时间较长，但在计算精度和稳定性方面表现更好。为取得稳定的计算能力，应采用 Cottet 人工粘性模型作为亚格子耗散模型。

(3) 提出了一对多面元-涡粒子转化算法，建立了面元-涡粒子耦合算法，并分析了耦合算法中的参数影响。使用二维插值方法在低阶面元上重建偶极子强度的连续分布，使得低阶面元上任意四边形区域都可转化为涡粒子；基于此，建立了一对多的低阶面元-涡粒子转化算法，以及单个面元对应涡粒子数量的自适应确定方法。结合面元法和涡粒子法的研究成果，建立了面元-涡粒子耦合算法，并改进了涡粒子重分布过程。根据数值模拟实例的结果，得出以下有关参数影响的结论：涡粒子重分布区域起始位置、涡粒子间距以及涡粒子重分布频率对三维水翼水动力性能的影响都很小，不同设

置所引起的水动力性能差异在1%以内；不同的涡粒子核半径计算所得的尾流涡强分布差距很大，较小的涡粒子核半径产生较大的涡强。通过分析，建议使用随边处边界层厚度来确定涡粒子的核半径。

(4) 在面元-涡粒子耦合算法中加入旋转周期性边界条件。针对螺旋桨流场的旋转周期性，在已得到的面元-涡粒子耦合算法的基础上，使用旋转周期性边界条件来提高计算效率和计算能力；在考虑旋转周期性边界条件的情况下，对快速多极子算法以及涡粒子重分布中的粒子均布方式、强度插值方式进行了相应的改进。通过对多个螺旋桨的流场及水动力性能的数值分析，得到以下结论：涡粒子重分布区域起始位置和涡粒子间距（或涡粒子密度）对计算所得的水动力性能影响很小，不同设置引起的差异在0.3%以内；面元-涡粒子耦合算法所得的水动力性能比面元法更加精确，在重载和大侧斜情况下差异尤为明显；耦合算法所得的流场速度分布比面元法更加接近实验测试结果；耦合算法所得的水动力性能和流场细节都与实验数据具有很好的一致性。

6.2 工作展望

本文所提的面元-涡粒子耦合算法中，通过将涡粒子与固体边界划分在不同的计算区域内，避免了涡粒子接近或穿透固体边界时的复杂处理过程，同时也限制了当前耦合算法在对转螺旋桨、导管螺旋桨方面的应用。此外，虽然使用了快速多极子算法，但当涡粒子数量达到十万量级时，计算速度仍然较慢，难以进行更高精度的模拟计算。所以，基于本文的研究工作，作者认为今后还可以从以下几个方面展开进一步的研究：

(1) 研究涡粒子接近面元时的处理方法，并基于此建立可分析对转螺旋桨、导管螺旋桨、螺旋桨尾流与舵板相互干扰的面元-涡粒子耦合算法。

(2) 使用格子涡方法、泊松方程快速求解算法等，提升诱导速度计算的效率，进一步提高耦合算法的计算速度；或使用GPU计算对当前算法进行加速。

(3) 考虑自由来流中的湍流，使用面元-涡粒子耦合算法模拟分析螺旋桨梢涡系统的发展和失稳过程。

参考文献

- [1] MUSCARI R, MASCIO A D, VERZICCO R. Modeling of vortex dynamics in the wake of a marine propeller[J]. *Computers & Fluids*, 2013, 73(73): 65–79.
- [2] JANG H, VERMA A, MAHESH K. Predicting Unsteady Loads in Marine Propulsor Crashback Using Large Eddy Simulation[J]. *International Journal of Rotating Machinery*, 2012, 2012(4).
- [3] VYSOHLID M, MAHESH K. Large Eddy Simulation of Crashback in Marine Propellers[D]. USA: university of michigan, 2007.
- [4] WINCKELMANS G S. Topics in vortex methods for the computation of three-and two-dimensional incompressible unsteady flows[D]. USA: California Institute of Technology, 1989.
- [5] CHATELAIN P, KIVOTIDES D, LEONARD A. Reconnection of colliding vortex rings[J]. *Physical review letters*, 2003, 90(5): 054501.
- [6] CHATELAIN P, BRICTEUX L, BACKAERT S, et al. Vortex particle-mesh methods with immersed lifting lines applied to the Large Eddy Simulation of wind turbine wakes[C] // Wake Conference, Gotland. 2011.
- [7] CHATELAIN P, BACKAERT S, WINCKELMANS G, et al. Large eddy simulation of wind turbine wakes[J]. *Flow, turbulence and combustion*, 2013, 91(3): 587–605.
- [8] BACKAERT S, CHATELAIN P, WINCKELMANS G. Vortex particle-mesh with immersed lifting lines for aerospace and wind engineering[J]. *Procedia IUTAM*, 2015, 18: 1–7.
- [9] BRANLARD E, MERCIER P, MACHEFAUX E, et al. Impact of a wind turbine on turbulence: Un-freezing turbulence by means of a simple vortex particle approach[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2016, 151: 37–47.
- [10] ZHAO J, HE C. A viscous vortex particle model for rotor wake and interference analysis[J]. *Journal of the American Helicopter Society*, 2010, 55(1): 12007–12007.
- [11] EPPS B P, KIMBALL R W. Unified Rotor Lifting Line Theory[J]. *Journal of Ship Research*, 2013, 57(4): 181–201.
- [12] LERBS H W. Moderately Loaded Propellers with a Finite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulations[J]. *Transactions - Society of Naval Architects and Marine Engineers*, 1952, 60: 73–123.
- [13] 盛振邦, 刘应中. 船舶原理(下册)[M]. 上海: 上海交大出版社, 2004.

- [14] CONEY W B. A method for the design of a class of optimum marine propulsors[D]. USA : Massachusetts Institute of Technology, 1989.
- [15] STUBBLEFIELD J M. Numerically-based ducted propeller design using vortex lattice lifting line theory[J]. Thesis Collection, 2009.
- [16] EPPS B, KETCHAM J, CHRYSOSTOMIDIS C. Propeller blade stress estimates using lifting line theory[C] // Conference on Grand Challenges in Modeling & Simulation. 2010 : 442 – 447.
- [17] KERWIN J E, LEE C S. Prediction of steady and unsteady marine propeller performance by numerical lifting-surface theory[J]. Sname Transactions, 1978, 86 : 1 – 30.
- [18] LEE C. Prediction of steady and unsteady performance of marine propellers with or without cavitation by numerical lifting-surface theory[D]. USA : Massachusetts Institute of Technology, 1979.
- [19] GREELEY D S, KERWIN J E. Numerical methods for propeller design and analysis in steady flow[J]. Transactions - Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1982, 90 : 415 – 453.
- [20] KERWIN J E. A Deformed Wake Model for Marine Propellers[J]. Vehicle Design, 1976.
- [21] KINNAS S A. A General-Theory for the Coupling between Thickness and Loading for Wings and Propellers[J]. Inviscid Fluids, 1992, 36(1) : 59 – 68.
- [22] 刘小龙, 唐登海, 侯樱. 对转桨定常面元法水动力性能预估[J]. 中国造船, 2009, 50(3) : 1 – 8.
- [23] 辛公正, 丁恩宝, 唐登海. 对转螺旋桨升力面设计方法[J]. 船舶力学, 2006, 10(2) : 40 – 46.
- [24] BALTAZAR J A M, Falcão de CAMPOS J A C, BOSSCHERS J. Open-Water Thrust and Torque Predictions of a Ducted Propeller System with a Panel Method[J]. International Journal of Rotating Machinery, 2012, 2012 : 1 – 11.
- [25] YE T, KINNAS S A. A Numerical Method for the Analysis of Unsteady Cavitating Rotor and Stator Interaction[C] // Proceedings of the 3rd International Symposium on Marine Propulsors. 2013.
- [26] TIAN Y, KINNAS S A. A Wake Model for the Prediction of Propeller Performance at Low Advance Ratios[J]. International Journal of Rotating Machinery, 2012, 2012 : 1 – 11.
- [27] 刘占一, 宋保维, 黄桥高, 等. 基于CFD技术的泵喷推进器水动力性能仿真方法[J]. 西北工业大学学报, 2010, 28(5) : 724 – 729.
- [28] 潘光, 胡斌, 王鹏, 等. 泵喷推进器定常水动力性能数值模拟[J]. 上海交通大学学报, 2013, 47(6) : 932 – 937.

- [29] ABDEL-MAKSOU D M, HEINKE J. Scale Effects on Ducted Propellers[C] // Proceedings of 24th Symposium on Naval Hydrodynamics. 2002.
- [30] HAIMOV H, VICARIO J, CORRAL J D. RANSE Code Application for Ducted and Endplate Propellers in Open Water[C] // Proceedings of the 2nd International Symposium on Marine Propulsors. 2011.
- [31] SONG B W, WANG Y J, TIAN W L. Open water performance comparison between hub-type and hubless rim driven thrusters based on CFD method[J]. Ocean Engineering, 2015, 103 : 55 – 63.
- [32] 沈志荣. 船桨舵相互作用的重叠网格技术数值方法研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2014.
- [33] MUSCARI R, MASCIO A D. Numerical Simulation of the Flow Past a Rotating Propeller behind a Hull[C] // Proceedings of the 2nd International Symposium on Marine Propulsors. 2011.
- [34] FELLI M, CAMUSSI R, DI FELICE F. Mechanisms of evolution of the propeller wake in the transition and far fields[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 682 : 5 – 53.
- [35] SIMONSEN C D. RANS Maneuvering Simulation of Esso Osaka With Rudder and a Body-Force Propeller[J]. Journal of Ship Research, 2005, 49(2) : 98 – 120.
- [36] WÖCKNER K, GREVE M, SCHARF M, et al. Unsteady Viscous/Inviscid Coupling Approaches for Propeller Flow Simulations[C] // Proceedings of the 2nd International Symposium on Marine Propulsors. 2011.
- [37] KINNAS S A, JEON C H, PUROHIT J, et al. Prediction of the Unsteady Cavitating Performance of Ducted Propellers Subject to an Inclined Inflow[C] // Proceedings of the 2nd International Symposium on Marine Propulsors. 2013.
- [38] HESS J L, VALAREZO W O. Calculation of steady flow about propellers using a surface panel method[J]. J. Propul. Power, 1985, 1(6) : 470 – 476.
- [39] KERWIN J E, KINNAS S A, LEE J-T, et al. A Surface Panel Method for the Hydrodynamic Analysis of Ducted Propellers[C] // Trans. SNAME. 1987 : 93 – 122.
- [40] HOSHINO T. Hydrodynamic Analysis of Propellers in Steady Flow Using a Surface Panel Method[J]. Naval Architecture & Ocean Engineering, 1990, 28 : 19 – 37.
- [41] HOSHINO T. Hydrodynamic analysis of propellers in unsteady flow using a surface panel method[J]. Journal of the Society of Naval Architects of Japan, 1993, 1993(174) : 71 – 87.
- [42] BERGER S, DRUCKENBROD M, PERGANDE M, et al. A Two-Stage Optimisation Method for Full-Scale Marine Propellers Working Behind a Ship[J]. Ship Technology Research, 2014, 61(2) : 64 – 79.

- [43] TIAN Y, KINNAS S A. Modeling of leading edge vortex and its effects on propeller performance[C] // Proceedings of the 2nd International Symposium on Marine Propulsors. 2011.
- [44] HE L. Numerical simulation of unsteady rotor/stator interaction and application to propeller/rudder combination[D]. USA : UT Austin, 2010.
- [45] SCHARF M, WANG K, JABAIR S A, et al. A Comparative Study on Computational Methods with regard to Propeller Simulation in Oblique Inflow[C] // Proceedings of the second workshop on cavitation and propeller performance. 2015 : 205 – 211.
- [46] LEE J. A potential based panel method for the analysis of marine propellers in steady flow[D]. USA : Massachusetts Institute of Technology, 1987.
- [47] BALTAZAR J. On the modelling of the potential flow about wings and marine propellers using a boundary element method[D]. Portugal : Instituto Superior Técnico, Lisbon, Portugal, 2008.
- [48] TIAN Y. Leading edge vortex modeling and its effect on propulsor performance[D]. USA : The University of Texas at Austin, 2014.
- [49] BALTAZAR J, ao de CAMPOS J F, BOSSCHERS J. Potential Flow Modelling of Ducted Propellers With a Panel Method[C] // Fourth International Symposium on Marine Propulsors. 2015.
- [50] KINNAS S A, HSIN C-Y. Boundary element method for the analysis of the unsteady flow around extreme propeller geometries[J]. AIAA Journal, 1992, 30(3): 688 – 696.
- [51] PYO S. Numerical modeling of propeller tip flows with wake sheet roll-up in three dimensions[D]. USA : Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [52] RAMSEY W D. Boundary integral methods for lifting bodies with vortex wakes[D]. USA : Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [53] KRASNY R. Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 184: 123 – 155.
- [54] LEONARD A. Vortex methods for flow simulation[J]. Journal of Computational Physics, 1980, 37(3): 289 – 335.
- [55] ANDERSON C, GREENGARD C. On vortex methods[J]. SIAM journal on numerical analysis, 1985, 22(3): 413 – 440.
- [56] BEALE J T. A convergent 3-D vortex method with grid-free stretching[J]. Mathematics of computation, 1986, 46(174): 401 – 424.
- [57] STOCK M J. Summary of Vortex Methods Literature (A living document rife with opinion)[H/OL]. 2007 [2017-2-15].

- http://markjstock.org/research/vortex_methods_literature.pdf.
- [58] SHEEL T K. Development of a Fast Vortex Method for Fluid Flow Simulation using Special-Purpose Computers[D]. Japan : Keio University, 2008.
- [59] YOKOTA R, SHEEL T K, OBI S. Calculation of isotropic turbulence using a pure Lagrangian vortex method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 226(2): 1589–1606.
- [60] CHENG H, GREENGARD L, ROKHLIN V. A Fast Adaptive Multipole Algorithm in Three Dimensions[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 155(2): 468–498.
- [61] WINCKELMANS G, LEONARD A. Weak solutions of the 3-dimensional vorticity equation with vortex singularities[J]. *Physics of Fluids*, 1988, 31(7): 1838–1839.
- [62] CHORIN A J. Numerical study of slightly viscous flow[J]. *Journal of fluid mechanics*, 1973, 57(04): 785–796.
- [63] FISHELOV D. Vortex methods for slightly viscous three-dimensional flow[J]. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, 1990, 11(3): 399–424.
- [64] GHARAKHANI A, GHONIEM A F. Simulation of three-dimensional internal flows by the random vortex and boundary element methods[C] // *ESAIM: Proceedings* : Vol 1. 1996: 33–47.
- [65] GHARAKHANI A, GHONIEM A F. Three-dimensional vortex simulation of time dependent incompressible internal viscous flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 134(1): 75–95.
- [66] HALD O H. Convergence of a random method with creation of vorticity[J]. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, 1986, 7(4): 1373–1386.
- [67] ROSSI L F. Resurrecting core spreading vortex methods: A new scheme that is both deterministic and convergent[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1996, 17(2): 370–397.
- [68] Greengard C. The core spreading vortex method approximates the wrong equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, 61 : 345–348.
- [69] HUANG M-J, SU H-X, CHEN L-C. A fast resurrected core-spreading vortex method with no-slip boundary conditions[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(6): 1916–1931.
- [70] BARBA L A. Vortex Method for computing high-Reynolds number flows: Increased accuracy with a fully mesh-less formulation.[D]. USA : California Institute of Technology, 2004.

- [71] BARBA L A, LEONARD A, ALLEN C B. Numerical investigations on the accuracy of the vortex method with and without remeshing[J]. AIAA paper, 2003, 3426.
- [72] SHANKAR S, VAN DOMMELEN L. A new diffusion procedure for vortex methods[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 127(1): 88 – 109.
- [73] SHANKAR S, van DOMMELEN L. A new diffusion scheme in vortex methods for three-dimensional incompressible flows[C] // ESAIM: Proceedings : Vol 1. 1996 : 587 – 599.
- [74] GHARAKHANI A. Grid-free simulation of 3-d vorticity diffusion by a high-order vorticity redistribution method[C] // 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. 2001 : 1 – 10.
- [75] STOCK M J, GHARAKHANI A. Graphics Processing Unit-accelerated boundary element method and vortex particle method[J]. Journal of aerospace computing, information, and communication, 2011, 8(7): 224 – 236.
- [76] DEGOND P, MAS-GALLIC S. The weighted particle method for convection-diffusion equations. I. The case of an isotropic viscosity[J]. Mathematics of computation, 1989, 53(188): 485 – 507.
- [77] KOUMOUTSAKOS P, LEONARD A. High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1995, 296 : 1 – 38.
- [78] ELDREDGE J D. Efficient tools for the simulation of flapping wing flows[J]. AIAA, 2005, 85(2005): 1 – 11.
- [79] WINCKELMANS G, LEONARD A. Improved vortex methods for three-dimensional flows[C] // Mathematical aspects of vortex dynamics : Vol 1. VA, USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989 : 25 – 35.
- [80] WINCKELMANS G, LEONARD A. Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows[J]. Journal of Computational Physics, 1993, 109(2): 247 – 273.
- [81] ELDREDGE J D. Numerical simulations of undulatory swimming at moderate Reynolds number[J]. Bioinspiration & biomimetics, 2006, 1(4): S19.
- [82] COTTET G-H, SALIHI M-L O, EL HAMROUI M. Multi-purpose regridding in vortex methods[C] // ESAIM: Proceedings : Vol 7. 1999 : 94 – 103.
- [83] COTTET G-H, KOUMOUTSAKOS P, SALIHI M L O. Vortex methods with spatially varying cores[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 162(1): 164 – 185.

- [84] PLOUMHANS P, WINCKELMANS G. Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 165(2): 354 – 406.
- [85] PLOUMHANS P, WINCKELMANS G, SALMON J K, et al. Vortex methods for direct numerical simulation of three-dimensional bluff body flows: application to the sphere at $Re= 300, 500, \text{ and } 1000$ [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 178(2): 427 – 463.
- [86] KOUMOUTSAKOS P D. Direct numerical simulations of unsteady separated flows using vortex methods[D]. USA : California Institute of Technology, 1993.
- [87] KOUMOUTSAKOS P. Inviscid axisymmetrization of an elliptical vortex[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 138(2): 821 – 857.
- [88] MONAGHAN J. Extrapolating B splines for interpolation[J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, 60(2): 253 – 262.
- [89] COTTET G-H, KOUMOUTSAKOS P D. Vortex methods: theory and practice[M]. UK : Cambridge university press, 2000.
- [90] BARBA L, LEONARD A, ALLEN C. Vortex method with meshless spatial adaption for accurate simulation of viscous, unsteady vortical flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, 47(5): 841 – 848.
- [91] BARBA L, LEONARD A, ALLEN C. Advances in viscous vortex methods meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, 47(5): 387 – 421.
- [92] COTTET G-H. Artificial viscosity models for vortex and particle methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 127(2): 299 – 308.
- [93] COTTET G-H, JIROVEANU D, MICHAUX B. Vorticity dynamics and turbulence models for Large-Eddy Simulations[J]. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2003, 37(1): 187 – 207.
- [94] WINCKELMANS G. Some progress in large-eddy simulation using the 3D vortex particle method[J]. *CTR Annual Research Briefs*, 1995: 391 – 415.
- [95] JEANMART H, WINCKELMANS G. Investigation of eddy-viscosity models modified using discrete filters: a simplified regularized variational multiscale model and an enhanced field model[J]. *Physics of Fluids (1994-present)*, 2007, 19(5): 055110.
- [96] KUDELA H, REGUCKI P. The vortex-in-cell method for the study of three-dimensional vortex structures[G] // *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics*. Netherlands : Springer, 2002: 49 – 54.

- [97] LIU C H, DOORLY D J. Vortex particle-in-cell method for three-dimensional viscous unbounded flow computations[J]. *International journal for numerical methods in fluids*, 2000, 32(1): 23 – 42.
- [98] MAMMETTI M, VERZICCO R, ORLANDI P. The study of vortex ring/wall interaction for artificial nose improvement[C] // *ESAIM: Proceedings*: Vol 7. 1999: 258 – 269.
- [99] SCHATZLE P R. An experimental study of fusion of vortex rings[D]. USA: California Institute of Technology, 1987.
- [100] CHATELAIN P, CURIONI A, BERGDORF M, et al. Billion vortex particle direct numerical simulations of aircraft wakes[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(13): 1296 – 1304.
- [101] KOUMOUTSAKOS P, LEONARD A, PEPIN F. Boundary conditions for viscous vortex methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 113(1): 52 – 61.
- [102] LIGHTHILL M J. *Laminar Boundary Layers*[M]. USA: Oxford University Press, 1963.
- [103] LEONARD A, SHIELS D, SALMON J, et al. Recent advances in high resolution vortex methods for incompressible flows[G] // *Fluid Dynamics and Co-located Conferences*. USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1997.
- [104] PLOUMHANS P, WINCKELMANS G, SALMON J. Vortex particles and tree codes: I. flows with arbitrary crossing between solid boundaries and particle redistribution lattice; II. vortex ring encountering a plane at an angle.[C] // *ESAIM: Proceedings*: Vol 7. 1999: 335 – 348.
- [105] HEJLESEN M M, KOUMOUTSAKOS P, LEONARD A, et al. Iterative Brinkman penalization for remeshed vortex methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2015, 280: 547 – 562.
- [106] MIMEAU C, COTTET G, MORTAZAVI I. Direct numerical simulations of three-dimensional flows past obstacles with a vortex penalization method[J]. *Computers & Fluids*, 2016, 136: 331 – 347.
- [107] MANN J. The spatial structure of neutral atmospheric surface-layer turbulence[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, 273(273): 141 – 168.
- [108] DAENINCK G. Developments in hybrid approaches: Vortex method with known separation location; Vortex method with near-wall Eulerian solver; RANS-LES coupling[D]. UK: University College London, 2006.
- [109] STOCK M J, GHARAKHANI A, STONE C P. Modeling rotor wakes with a hybrid OVERFLOW-vortex method on a GPU cluster[C] // *28th AIAA applied aerodynamics conference*: Vol 28. 2010.

- [110] STONE C, DUQUE E, HENNES C, et al. Rotor wake modeling with a coupled Eulerian and vortex particle method[C] //48th AIAA Aerospace Sciences Meeting. 2010: 2010–0312.
- [111] WILLIS D J, PERAIRE J, WHITE J K. A combined pFFT-multipole tree code, unsteady panel method with vortex particle wakes[J]. International Journal for numerical methods in fluids, 2000, 53(8): 1399–1422.
- [112] TAN J-F, WANG H-W. Simulating unsteady aerodynamics of helicopter rotor with panel/viscous vortex particle method[J]. Aerospace Science and Technology, 2013, 30(1): 255–268.
- [113] 谭剑锋, 王浩文, 吴超, 等. 基于非定常面元/黏性涡粒子混合法的旋翼/平尾非定常气动干扰[J]. 航空学报, 2014, 35(3): 643–656.
- [114] 胡昊, 宋小勇, 顾波, 等. 基于面元-黏性涡粒子混合法的风力机风轮气动计算[J]. 航空动力学报, 2015, 30(6): 1432–1439.
- [115] 王红波, 祝小平, 周洲, 等. 基于非定常面元/黏性涡粒子法的低雷诺数滑流气动干扰研究[J]. 航空学报, 2016.
- [116] WILLIS D J. An unsteady, accelerated, high order panel method with vortex particle wakes[D]. USA: Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [117] 王元明. 工程数学:数学物理方程与特殊函数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 103.
- [118] KATZ J, PLOTKIN A. Low-speed aerodynamics: Vol 13[M]. UK: Cambridge University Press, 2001.
- [119] NEWMAN J N. Distributions of sources and normal dipoles over a quadrilateral panel[J]. Journal of Engineering Mathematics, 1986, 20(2): 113–126.
- [120] MORINO L, KUO C-C. Subsonic potential aerodynamics for complex configurations: a general theory[J]. AIAA journal, 1974, 12(2): 191–197.
- [121] SCHLICHTING H. Boundary-Layer Theory (7th Edition)[M]. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [122] MAYERS D, SÜLI E. An introduction to numerical analysis[M]. USA: Wiley, 1978: 349.
- [123] JESSUP S. An experimental investigation of viscous aspects of propeller blade flow[D]. Washington D. C., USA: Catholic University, 1989.
- [124] HSIN C, KERWIN J, KINNAS S. A PANEL METHOD FOR THE ANALYSIS OF THE FLOW AROUND HIGHLY SKEWED PROPELLERS[C] //Proceedings of the Propellers/Shafting 91 Symposium. 1991.

- [125] MOERI. MOERI Container Ship (KCS)[EB/OL]. 2008 [2015-9-14].
http://www.simman2008.dk/KCS/kcs_geometry.htm.
- [126] HESS J L, SMITH A O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies[J]. Progress in Aerospace Sciences, 1967, 8: 1–138.
- [127] SAFFMAN P G. Vortex dynamics[M]. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1992.
- [128] ASTOLFI J-A, FRUMAN D, BILLARD J-Y. A model for tip vortex roll-up in the near field region of three-dimensional foils and the prediction of cavitation onset[J]. European Journal of Mechanics-B/Fluids, 1999, 18(4): 757–775.
- [129] HEINKE H-J. Potsdam Propeller Test Case (PPTC): Cavitation tests with the model propeller VP1304: 3753[R]. Potsdam, Germany: Potsdam model basin, 2011.
- [130] BOSWELL R J, BOSWELL R J. Design, Cavitation Performance, and Open-Water Performance of a Series of Research Skewed Propellers: 3339[R]. Washington, D.C., USA: Department of navy naval ship research and development center, 1971.
- [131] GAUTSCHI W. Error Function and Fresnel Integrals[M] // Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. USA: US Government Publishing Office, 1965: 295–299.
- [132] YANG Z. Large-eddy simulation: Past, present and the future[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(1): 11–24.
- [133] MACH K-P. Potsdam Propeller Test Case (PPTC): LDV Velocity Measurements with the Model Propeller VP1304: 3754[R]. Potsdam, Germany: Potsdam model basin, 2011.
- [134] WEISSTEIN E W. Associated Legendre Polynomial[EB/OL]. 2016 [2016-5-20].
<http://mathworld.wolfram.com/AssociatedLegendrePolynomial.html>.

附录

附录A 快速多极子算法及其在涡粒子法中的应用

本文使用快速多极子算法对涡粒子的诱导速度和速度梯度进行计算，其主要依据为[60]中描述的三维快速自适应多极子算法，为了本文的完整性，本部分对其进行简要概述。

附录A.1 快速多极子算法概述

快速多极子算法（Fast Multipole Method, FMM）主要用来计算有势场中所有粒子间的成对影响（包括势和力），比如天体物理中的天体受力，电荷场中的电势和电荷受力。三维有势场中势的计算公式为：

$$\Phi(\mathbf{X}_j) = \sum_{i=1, i \neq j}^{N_p} \frac{q_i}{\|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\|} \quad (\text{A-1})$$

式中 N_p 为场中粒子的数量， \mathbf{X}_i 和 \mathbf{X}_j 为粒子的位置， q_i 为粒子的强度（质量、电荷等）。有势场中的场强为：

$$E(\mathbf{X}_j) = \sum_{i=1, i \neq j}^{N_p} q_i \frac{\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i}{\|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i\|^3} \quad (\text{A-2})$$

粒子处场强与其强度的乘积即为粒子所受力。

本文首先以求解有势场中的势为例，讲述快速多极子算法的原理和流程，之后介绍如何将快速多极子算法应用于涡粒子场的诱导速度和速度梯度的计算中。

附录A.2 快速多极子算法细节

三维快速多极子算法中，粒子在某点的势被表示为球谐函数（Spherical Harmonics）的线性组合，本文使用[60]中的球谐函数定义，即

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(n - |m|)!}{(n + |m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{A-3})$$

式中 i 为虚数单位， P_n^m 为缔合勒让德函数，其定义与计算方法见[134]。球谐函数的共轭值为：

$$\overline{Y_n^m(\theta, \phi)} = (-1)^m Y_n^{-m}(\theta, \phi). \quad (\text{A-4})$$

快速多极子算法的实现主要依据于以下三个定理：

定理1 假设半径为 a 的球体内存在 N 个强度分别为 q_1, q_2, \dots, q_N 的粒子，其关于球心的相对球坐标分别为 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1), (\rho_2, \alpha_2, \beta_2), \dots, (\rho_N, \alpha_N, \beta_N)$ 。则对于任意一个位于此

球体之外，且关于球心的相对球坐标为 (r, θ, ϕ) 的点 X ，球体内 N 个粒子产生的势可以表示为：

$$\Phi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \phi) \quad (\text{A-5})$$

此式称为多极子展开式，式中的系数 M_n^m 为

$$M_n^m = \sum_{l=1}^N q_l \rho_l^n \overline{Y_n^m}(\alpha_l, \beta_l). \quad (\text{A-6})$$

需要指出的是，上式与[60]中所给公式略有不同。

定理2 假设半径为 a 的球体外部存在 N 个强度分别为 q_1, q_2, \dots, q_N 的粒子，其关于球心的相对球坐标分别为 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1), (\rho_2, \alpha_2, \beta_2), \dots, (\rho_N, \alpha_N, \beta_N)$ 。则对于任意一个位于此球体内部，且关于球心的相对球坐标为 (r, θ, ϕ) 的点 X ，上述球体外部的 N 个粒子产生的势可表示为：

$$\Phi(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j L_j^k Y_j^k(\theta, \phi) r^j \quad (\text{A-7})$$

此式称为局部展开式，式中的系数 L_j^k 为

$$L_j^k = \sum_{l=1}^N q_l \frac{\overline{Y_j^k}(\alpha_l, \beta_l)}{\rho_l^{j+1}}. \quad (\text{A-8})$$

定理3 假设存在两个半径为 a 的球体域 **A**、**B**，其球心间距离大于 $(c+1)a$ ，其中 $c > 1$ ，**A** 的球心关于 **B** 球心的相对球坐标为 (ρ, α, β) 。进一步假设球体 **A** 内部存在 N 个粒子，其对球体 **B** 内部任意点产生的势即可以用 **A** 的多级子展开式，即式 (A-5) 表示，也可以用 **B** 的局部展开式，即式 (A-7) 表示，局部展开式中的系数可由多级子展开式的系数求得，即：

$$L_j^k = \sum_n \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m i^{|k-m|-|k|-|m|} A_n^m A_j^k Y_{j+n}^{m-k}(\alpha, \beta)}{(-1)^n A_{j+n}^{m-k} \rho^{j+n+1}} \quad (\text{A-9})$$

式中 i 为虚数单位， A_n^m 定义为

$$A_n^m = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-m)!(n+m)!}} & \text{当 } |m| \leq n \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } |m| > n \text{ 时} \end{cases} \quad (\text{A-10})$$

依据以上三个定理，势的计算可从粒子间的相互影响转化为粒子簇之间的相互影响。计算场中各粒子处的势时，首先根据几何位置将场中的粒子划分成若干粒子簇，并建立每个粒子簇的多极子展开式。对于距离满足要求的两个粒子簇之间的影响，通过多极子展开式到局部展开式的转换来实现，如图A-1所示，其他情况下（粒子簇距离过近、粒子簇内部粒子间的相互影响等）的势仍然按粒子的成对影响进行直接计算。实际计算中，式 (A-5) 中的 n 和式 (A-7) 中的 j 只取到一正整数 p ，所得多极子算法称为 p 阶多极子算法。

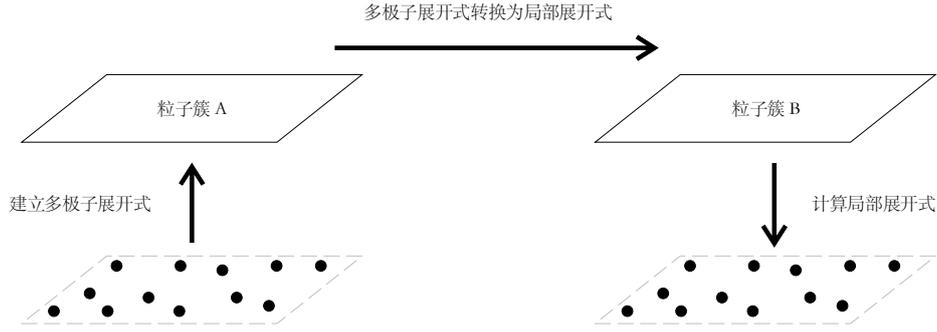


图 A-1 简单多极子算法原理示意图

上述的多极子算法中，计算大量粒子簇之间展开式的转换仍然非常耗时。而除了上述的三个定理外，多极子展开式和局部展开式还可以进行平移转换，其遵循以下两条定理：

定理4（多极子展开式的平移）假设半径为 a 的球体 A 内部存在 N 个强度分别为 q_1, q_2, \dots, q_N 的粒子，根据定理1，对于处于 A 外部，且相对于 A 球心球坐标为 (r', θ', ϕ') 的任意位置 X 处，上述粒子产生的势可表示为：

$$\Phi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r'^{n+1}} Y_n^m(\theta', \phi') \quad (\text{A-11})$$

进一步假设存在一个包含球体 A 的球体 B，球体 A 的球心关于球体 B 球心的相对球坐标为 (ρ, α, β) 。则对于任意一个位于球体 B 外部，且关于球体 B 球心的相对球坐标为 (r, θ, ϕ) 的位置 X ，上述 N 个粒子所产生的势可表示为：

$$\Phi(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \frac{O_j^k}{r^{j+1}} Y_j^k(\theta, \phi) \quad (\text{A-12})$$

式中

$$O_j^k = \sum_{n=0}^j \sum_{m=-n}^n \frac{M_{j-n}^{k-m} i^{|k|-|m|-|k-m|} A_n^m A_{j-n}^{k-m} \rho^n Y_n^{-m}(\alpha, \beta)}{A_j^k}. \quad (\text{A-13})$$

式中 A_n^m 由式 (A-10) 定义。

定理5（局部展开式的平移）假设场中存在 A、B 两点，A 相对于 B 的球坐标为 (ρ, α, β) 。取空间中任意一点 X ，其相对于 A、B 两点的球坐标分别为 (r', θ', ϕ') 和 (r, θ, ϕ) 。令 p 为一有限自然数，进一步假设存在以 A 为中心的 p 阶局部展开式，其在 X 位置处的值为：

$$\Phi(X) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n L_n^m Y_n^m(\theta', \phi') r'^n \quad (\text{A-14})$$

则有

$$\Phi(X) = \sum_{j=0}^p \sum_{k=-j}^j P_j^k Y_j^k(\theta, \phi) r^j \quad (\text{A-15})$$

式中

$$P_j^k = \sum_{n=j}^p \sum_{m=-n}^n \frac{L_n^m i^{|m|-|k|-|m-k|} A_{n-j}^{m-k} A_j^k Y_{n-j}^{m-k}(\alpha, \beta) \rho^{n-j}}{(-1)^{n+j} A_n^m} \quad (\text{A-16})$$

式中 A_n^m 由式 (A-10) 定义。

根据定理4、5，对粒子簇建立分层的树形结构，可以大量减少粒子簇之间的相互影响。按几何位置，三维中一个大的矩形粒子簇可以等分为八个小粒子簇，这里的大、小粒子簇分别称为父粒子簇和子粒子簇。父粒子簇的多极子展开式可以由其所有子粒子簇的多极子展开式转换求和得到，而父粒子簇的局部展开式亦可以转换成为子粒子簇的局部展开式。据此，粒子簇之间的相互影响可以按图A-2的过程来实现：

1. 按树形结构划分粒子簇，根节点包含场中所有的粒子，然后逐层细分，直到粒子簇的尺寸到达某限定值为止；
2. 建立最底层粒子簇（树形结构中的叶子节点）的多级子展开式，并逐层向上转换，得到所有粒子簇的多级子展开式；
3. 逐层向下，将父粒子簇的局部展开式转换到子粒子簇中，对于距离满足远场要求且未在父粒子簇中考虑的粒子簇，进行多级子展开式到局部展开式的转换；
4. 展开最底层粒子簇的局部展开式，并直接计算局部展开式中没有考虑的粒子的影响，求得每个粒子处的势。

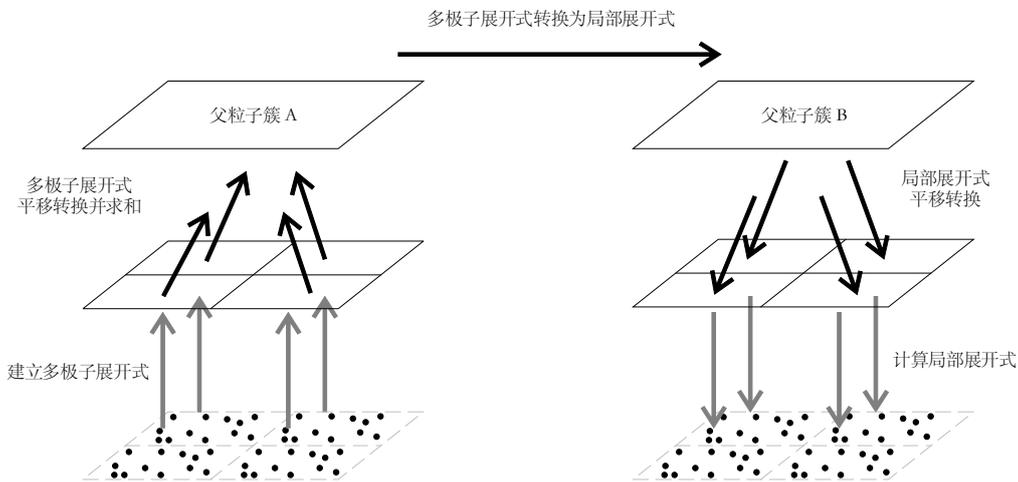


图 A-2 使用分层结构的多极子算法原理示意图

本文在进行多极子展开式到局部展开式的转换时，两个矩形粒子簇之间至少间隔一个粒子簇的长度，根据[60]中的误差分析，展开式的阶数和相对误差见表A-1。本文使用的阶数为14，相对误差约为 5×10^{-5} 。

为进一步提高快速多极子算法的计算效率，[60]中对于多极子展开式到局部展开式的转换，还借助了旋转操作和指数展开式，同时粒子簇尺寸按当地粒子密度进行自适

表 A-1 展开式阶数与相对误差间的关系

阶数	相对误差
10	10^{-3}
19	10^{-6}
29	10^{-9}

应调整。这些技术在本文中都得到了应用，然而其对快速多极子算法的理解并没有帮助，所以在这里不再赘述。

附录A.3 基于快速多极子算法的涡粒子速度与速度梯度计算

由于使用快速多极子算法处理的是远场涡粒子的影响，所以可以不考虑涡粒子的光滑核函数，而将涡粒子作为奇异点来考虑。

若将式 (A-6) 所给出的多极子展开式中的 $\rho_l \overline{Y}_n^m(\alpha_l, \beta_l)$ 记为 M_l ， $\frac{Y_n^m(\theta, \phi)}{r^{n+1}}$ 记为 S ，则式 (A-6) 可以表示为：

$$\Phi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n S \sum_{l=1}^N q_l M_l \quad (\text{A-17})$$

同理，将式 (A-8) 所给出的局部展开式中的 $\frac{\overline{Y}_j^k(\alpha_l, \beta_l)}{\rho_l^{j+1}}$ 记为 L_l ， $Y_j^k(\theta, \phi)r^j$ 记为 R ，则式 (A-8) 可表示为：

$$\Phi(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j R \sum_{l=1}^N q_l L_l \quad (\text{A-18})$$

根据文献[58, 59]中的推导，涡粒子产生的诱导速度可以表示为：

$$\mathbf{u}(X) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\sum_{l=1}^N \alpha_l M_l \right) \times \nabla S \quad (\text{A-19})$$

$$\mathbf{u}(X) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \left(\sum_{l=1}^N \alpha_l L_l \right) \times \nabla R \quad (\text{A-20})$$

式中 α_l 为涡粒子的强度。涡粒子诱导产生的速度梯度可表示为：

$$\nabla \mathbf{u}(X) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\sum_{l=1}^N \alpha_l \nabla M_l \right) \times \nabla S \quad (\text{A-21})$$

$$\nabla \mathbf{u}(X) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \left(\sum_{l=1}^N \alpha_l \nabla L_l \right) \times \nabla R \quad (\text{A-22})$$

计算中涉及到的球谐函数梯度为：

$$\nabla Y_n^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \left(n \cos \theta Y_n^m - \sqrt{n^2 - m^2} Y_{n-1}^m \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{im}{\sin \theta} Y_n^m \mathbf{e}_\phi \quad (\text{A-23})$$

式中 \mathbf{e}_θ 和 \mathbf{e}_ϕ 分别为 θ 和 ϕ 方向上的单位方向向量。

按式 (A-19) 和 (A-21) 对每个涡粒子强度分量建立多极子展开式, 即

$$\mathbf{M}_n^m = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^N \alpha_l M_l \\ \sum_{l=1}^N \alpha_l \nabla M_l \end{pmatrix} \quad (\text{A-24})$$

则每个粒子簇具有六个多极子展开式, 粒子簇之间展开式的转换过程同附录A.2节。得到局部展开式 \mathbf{L}_j^k 后, 可依据下式求得诱导速度和速度梯度:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \mathbf{L}_j^k \times \nabla R. \quad (\text{A-25})$$

至此, 就可以使用快速多极子算法计算涡粒子场中涡粒子处的诱导速度和速度梯度了。

致 谢

首先要郑重感谢我的导师宋保维教授。本博士论文的完成离不开宋老师的谆谆教导和大力支持。宋老师以自身渊博的知识、认真努力的工作态度和严谨的学术理念，为我树立了良好的榜样。宋老师在学术方面对我进行了启蒙，使我在科研工作中具有坚实的基础。此外，宋老师为我们创造了优良的学习、研究环境，提供了一个可以自由学术讨论、共同成长的平台，使我受益匪浅。再一次感谢宋老师多年来对我各方面的大力支持和帮助。

其次，我要感谢团队的潘光教授、王鹏教授、杜晓旭副教授、毛昭勇教授、曹永辉副教授以及姜军老师。各位老师在我的博士研究期间，都给予了我不同程度的指导、帮助与鼓励，使得我的工作可以更高效的顺利进行。潘老师所授的鱼雷力学课程使我对面元法具有了深入全面的认识。王老师、毛老师和杜老师在我设计螺旋桨期间，对我悉心指导，提供了诸多有关资料，在我对螺旋桨的认识方面提供了很大的帮助。此外，在本论文的写作过程中，王老师给予了悉心指导，提供了很大的帮助。

接下来要感谢的是我的各位师兄弟，包括田文龙师兄、施瑶师兄、董华超师兄、丁永乐、郭奋等所有的团队内部的师兄弟。当我遇到疑惑时，他们经常放下自己手头工作与我进行学术讨论，关键时候总是能帮我重拾信心，开拓思路，拓展了我的知识范围。此外，还要感谢团队以外的同学和朋友，包括拓宏亮、王俊腾等，他们在我生活学习中遇到困难时，总能给予我及时的帮助，使得我能专心于科研。

此外，我要感谢德国汉堡工业大学的 Moustafa Abdel-Maksoud 教授。Maksoud 教授在我留学德国期间，对我悉心指导，不厌其烦的指正我在工作上错误的思想，提供新的研究思路，鼓励我要敢于研究新的内容。除此之外，Maksoud 教授对我在德国的生活方面也给予了很大的帮助，对于我融入同事生活起到了关键作用。还要感谢的是我在德国遇到的Dag Feder、Martin Scharf、Stephan Berger、Daniel González、王珂琦等同事，他们在面元法程序的改进和螺旋桨理论的理解方面，给予了我很大的帮助。

然后，要感谢我的父母和兄长，将到而立之年，不能尽人子之责，深感愧疚。感谢他们这么多年来理解和支持，使得我可以安心的进行博士期间的学习和工作。

还要感谢的是中国留学基金委给予了我到德国留学的机会，此次留学对本博士论文的有关工作起到了重要的作用。

最后，要感谢的是我的未婚妻宋晓桑女士，三年异地，两年异国，五年博士生涯中感谢她的不离不弃、默默支持和不断的鼓励。未婚妻与我分享了博士期间的各种苦恼与喜悦，在人生最落魄的时段相伴左右，同我一并体会山穷水复疑无路，柳暗花明又一村的博士经历。谢字不足以表达内心感恩，愿以此生与卿同度。

攻读博士学位期间发表的学术论文和参加科研情况

一、学术论文发表及专利

- [1] Youjiang Wang, Moustafa Abdel-Maksoud, Keqi Wang, and Baowei Song. Prediction of tip vortex cavitation inception with low-order panel method. *Ocean Engineering*, 125:124–133, 2016. (SCI2区, IF:1.488, 对应第二章).
- [2] Baowei Song, Youjiang Wang, and Wenlong Tian. Open water performance comparison between hub-type and hubless rim driven thrusters based on cfd method. *Ocean Engineering*, 103:55–63, 2015. (SCI2区, IF:1.488, 对应第一章).
- [3] Youjiang Wang, Moustafa Abdel-Maksoud, and Baowei Song. A fast method to realize the pressure Kutta condition in boundary element method for lifting bodies. *Ocean Engineering*, 130:398–406, 2017. (SCI2区, IF:1.488, 对应第二章)
- [4] Youjiang Wang, Moustafa Abdel-Maksoud, and Baowei Song. Convergence of different wake alignment methods in a panel code for steady-state flows. *Journal of Marine Science & Technology*, 21(4):567–578, 2016. (SCI3区, IF:0.709, 对应第二章).
- [5] Youjiang Wang, Moustafa Abdel-Maksoud, and Baowei Song. Simulating marine propellers with vortex particle method. *Physics of Fluids*, 29(1):017103, 2017. (SCI2区, IF:2.017, 对应第五章).
- [6] Youjiang Wang, Moustafa Abdel-Maksoud, and Baowei Song. A hybrid method combining boundary layer element and vortex particle methods. *Computers and Fluids*. (在审, SCI3区, IF:1.891, 对应第四章).
- [7] Youjiang Wang, Moustafa Abdel-Maksoud, Peng Wang and Baowei Song. Simulate the PPTC propeller with a vortex particle-boundary element hybrid method. *Fifth International Symposium on Marine Propulsion*, 2017. (摘要已录用, 对应第五章).
- [8] Youjiang Wang, Baowei Song, and Zhaoyong Mao. 2d nonlinear study of a single-point mooring unmanned underwater vehicle system based on multibody system. *Wit Transactions on Modelling & Simulation*, 60:565–574, 2014. (EI).
- [9] Xiaoxu Du, Xinliang Li, Chengzhi Hao, Youjiang Wang. Stability Analysis of Two-Point Mooring Autonomous Underwater Vehicle. *Journal of Shanghai Jiaotong University(Science)*, 20:618–624, 2015. (EI)

二、获奖和专利

- [1] 王有江. 2016工信创新奖学金二等奖.

[2] 杜晓旭, 李新亮, 王欢, 施瑶, 王有江. 一种水下驱动联动装置:中国. 发明专利, 受理号:2014101861760.

[3] 杜晓旭, 李新亮, 王欢, 施瑶, 王有江. 一种波浪驱动水下航行器:中国. 发明专利, 受理号:201410446306X.

二、参加科研情况

[1] 集成电机推进器设计技术。

本人完成工作:

- (1) 集成电机推进器桨叶几何与导管几何的设计;
- (2) 集成电机水动力性能分析;
- (3) 图纸绘制。

[2] 锚泊UUV稳定性研究。

本人完成工作:

- (1) 对锚泊UUV坐底稳定性问题建模分析;
- (2) 各种姿态下的UUV水动力性能计算;
- (3) 锚泊UUV稳定性设计。

[3] 水下航行器分离技术。

本人完成工作:

- (1) 使用动网格技术数值分析航行器与运载器的分离过程;
- (2) 对比不同分离方案优缺点。

西北工业大学

学位论文知识产权声明书

本人完全了解学校有关保护知识产权的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属于西北工业大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版。本人允许论文被查阅和借阅。学校可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律注明作者单位为西北工业大学。

保密论文待解密后适用本声明。

学位论文作者签名：_____

指导教师签名：_____

年 月 日

年 月 日

西北工业大学

学位论文原创性声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容和致谢的地方外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表或撰写过的研究成果，不包含本人或其他已申请学位或其他用途使用过的成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式表明。

本人学位论文与资料若有不实，愿意承担一切相关的法律责任。

学位论文作者签名：_____

年 月 日